M2 Mathématiques Enseignement
TD d'analyse2 2010/2011

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Espaces vectoriels normés

Exercice 1. On définit pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\dfrac{x+ty}{1+t^2}\right|$. Montrer que $\|.\|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ et dessiner la boule unité correspondante.

Exercice 2. Dire si les ensembles A_i sont ouverts, fermés, bornés, compacts dans E_i.

$A_1 = [0;1];\ E_1 = \mathbb{R}$
$A_2 =]0;1];\ E_2 = \mathbb{R}$
$A_3 = [0;+\infty[;\ E_3 = \mathbb{R}$
$A_4 = [0;1] \times [-2;4];\ E_4 = \mathbb{R}^2$
$A_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\};\ E_5 = \mathbb{R}^2$
$A_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 5y^2 < 9\};\ E_6 = \mathbb{R}^2$
$A_7 =]0;1[\times \{0\};\ E_7 = \mathbb{R}^2$
$A_8 =]0;1];\ E_8 =]0;1]$

Exercice 3. Soient E et F deux evn et f une application linéaire de E dans F.
a) Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :
i) f est continue en 0.
ii) f est continue.
iii) f est bornée sur la boule unité de E.
On note $\|f\| := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F$.
b) Montrer que $f \mapsto \|f\|$ définit une norme sur l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.
c) Montrer que $\|f\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$.

Exercice 4. Soit ℓ^∞ l'espace des suites bornées, muni de la norme infinie, i.e. pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Soit T l'application de ℓ^∞ dans lui-même, telle que $T((x_n)) = (t_n)$ où

$$t_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_i, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

a) Quelle est l'image de la suite constante $u_n = 1$ pour tout n ?
b) Montrer que T est continue et déterminer sa norme.

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes réels. Pour $P \in E$, on définit $\|P\| = \sup_{i=0,\cdots,n} |a_i|$ si $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.
a) Vérifier que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E.
On considère les applications g_i : $g_1(P) = X^2P$, $g_2(P) = P(\frac{1}{2})$, $g_3(P) = P'$, $g_4(P) = P(0)^2X$.
b) Déterminer celles qui sont linéaires.
c) Déterminer celles qui sont continues.
d) Déterminer les normes de celles qui sont linéaires continues.

Exercice 6. Soit $\ell^1 = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \sum |x_n| < \infty \right\}$. On pose $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$, $\|x\|_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|$.

a) La suite $(1, 1, 1, \cdots)$ est-elle dans ℓ^1 ?

b) Montrer que ℓ^1 est un espace vectoriel.

c) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ définissent deux normes sur ℓ^1.

d) Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit v_k l'élément de ℓ^1 qui correspond à la suite dont les premiers k-termes sont 1 et les autres termes sont nuls. Calculer $\|v_k\|_\infty$ puis $\|v_k\|_1$.

e) En déduire que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

f) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et w_k l'élément de ℓ^1 défini par $w_k = \frac{1}{k} v_k$. Montrer que la suite $(w_k)_k$ converge pour $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour $\|\cdot\|_1$.

Exercice 7. Démontrer que l'espace $E = C^0([a, b])$ des fonctions continues sur $[a, b]$ muni de la norme $\|f\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ est un espace de Banach.

Exercice 8. (Théorèmes du point fixe) Soit E un espace de Banach et $f : E \to E$.

a) Donner un énoncé et une preuve du théorème du point fixe.

b) On ne suppose pas que f soit contractante mais par contre qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $f^n = f \circ .. \circ f$ est contractante. Montrer que f admet un unique point fixe.

c) Soit $F \subset E$ compact et $f : F \to F$ telle que $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ pour tous x, y dans F. Montrer que g admet un unique point fixe dans F. (Indication : considérer le minimum de la fonction $g(x) := \|x - f(x)\|$).

Exercice 9. Enoncer les résultats que vous connaissez qui sont toujours vrai dans un evn de dimension finie, mais pas forcément en dimension infinie.

Exercice 10. (Espaces préhilbertiens)

a) Rappeler la définition d'un produit scalaire et d'un espace préhilbertien.

b) Soit H un espace préhilbertien et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille libre. Montrer qu'il existe une famille orthonormée (la construire) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$F_n = \text{Vect}(f_0, ..., f_n) = \text{Vect}(e_0, ..., e_n).$$

c) Montrer que tout espace préhilbertien de dimension finie admet une base orthonormale.

d) Vérifier que l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) & \mapsto & xx' + 3yy' + 4zz' - xy' - x'y + 2yz' + 2y'z \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ et donner une base orthonormale correspondante.

e) Soit $x \in H$ et $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (x, f_k) f_k$. Montrer que

$$\mathrm{d}(x, F_n)^2 = \left(\inf_{y\in F_n} \|x - y\| \right)^2 = \|x - p(x)\|^2.$$

(Indication : montrer que $(x - p(x), y) = 0$ pour tout $y \in F_n$ et penser à Pythagore).