Université de Cergy-Pontoise
Département de Mathématiques
L1 MIPI - S1
2019/2020

Cours de Mathématiques : Fonctions d'une variable réelle

-

Polycopié d'Exercices

Chapitre 1 : Logique et nombres réels

Exercice 1. Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note $S_k = \sum_{m=1}^{n} m^k$.

a) Dans cette question uniquement on prend $n = 3$. Calculer S_1, S_2 et S_3.

b) Montrer que $S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Pour cela on pourra calculer $2S_1$, en écrivant les éléments une fois dans le sens croissant, une fois dans le sens décroissant.

c) Montrer que $S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Pour cela on pourra calculer de deux façons différentes la somme $\sum_{m=0}^{n} \Big((m+1)^3 - m^3\Big)$, une fois en développant $(m+1)^3$, l'autre sans le développer.

d) Retrouver les résultats des questions a) et b) à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k = \dfrac{(n+1)^n}{n!}$.

Rappel : si $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ et par convention $0! = 1$.

Exercice 3. Démontrer que pour tous nombres réels a et b et pour tout entier naturel n

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k.$$

En déduire que pour tout réel $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exercice 4. On rappelle que si k et n sont des entiers, avec $0 \leq k \leq n$, $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Exercice 5.

a) Remplir les tables de vérités suivantes

A	B	A OU B	NON (A OU B)	NON A	NON B	NON A ET NON B
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow B$ ET $B \Rightarrow A$	(NON A) OU B	(NON B) $\Rightarrow$ (NON A)
V	V						
V	F						
F	V						
F	F						

b) En utilisant les tables de vérité ci-dessus, montrer que

i) (non (A ou B)) $\Leftrightarrow$ (non A et non B).

ii) (non (A et B)) $\Leftrightarrow$ (non A ou non B).

iii) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A))$.

iv) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow$ (non A ou B).

v) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow$ (non $B \Rightarrow$ non A).

Exercice 6. Écrire la négation de $a \leq b \leq c$ et celle de $a = b = c$.

Exercice 7. Dans chacun des cas suivants , la proposition B est-elle une condition suffisante (CS), une condition nécessaire (CN) ou une condition nécessaire et suffisante (CNS) de la proposition A ?

a) A : "$x^2 \geq x$" et B : "$x \geq 1$"

b) A : "n impair" et B : "n^2 impair"

c) A : "$x^2 < 0$" et B : "$x \geq 10^{10}$"

d) A : "$x \in [1, 3]$" et B : "$x \in [1, 4]$"

Exercice 8. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $1 \leq x < 3$ et $-1 < y \leq 2$. Donner des encadrements de $x + y$, $x - y$, xy et $\frac{1}{x}$.

Même questions en supposant cette fois que $-3 \leq x \leq 2$ et $-5 \leq y \leq 1$.

Exercice 9. Montrer les inégalités suivantes, pour tous x, y réels :

a) Si $x > 0$ alors $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$,

b) $xy \leq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$,

c) $xy \leq \dfrac{x^2 + y^2}{2}$,

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $3x^2 + 4x + 3 = 4x^2 - 3x + 4$.

b) $\dfrac{3x + 4}{4x + 2} = x$.

c) $x = \sqrt{3x + 10}$.

d) $\dfrac{2x + 1}{3x - 4} = \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

Exercice 11. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels positifs. Montrer que si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ alors tous les a_k sont nuls.

Exercice 12. On considère un nombre réel x positif et les deux propositions A : "Pour tout réel ε strictement positif, $0 \leq x \leq \varepsilon$" et B : "$x = 0$". Montrer que $A \Leftrightarrow B$.

Exercice 13. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et représenter graphiquement l'ensemble des solutions :

a) $2x^2 - 3x + 4 < 4x^2 + 2x + 9$,

b) $2x^3 - 5x^2 + 3x \leq 0$,

c) $\dfrac{2x + 1}{3x + 2} < 0$,

d) $\dfrac{x - 1}{x + 2} \geq 3$,

e) $\dfrac{1}{x} > x$,

f) $|x + 1| < 0.1$,

g) $|x - 2| > 10$,

h) $|x| < |x + 1|$,

Exercice 14. Soient x, y deux nombres réels. On note $\max(x, y)$ le plus grand des deux nombres x et y, et $\min(x, y)$ le plus petit.

a) Montrer que $x + y = \max(x, y) + \min(x, y)$.
b) Montrer que $|x - y| = \max(x, y) - \min(x, y)$.
c) Montrer que $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ et que $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

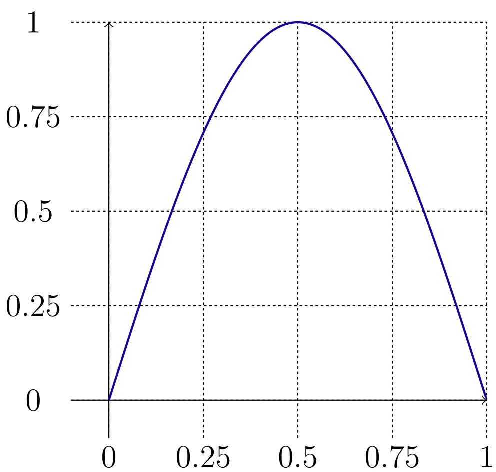
Exercice 15. On suppose que $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$ vérifient $|x - a| < |a|$. Montrer qu'alors x est non nul et de même signe que a.

Exercice 16. Soit $x \geq 0$. Montrer que $\dfrac{2x + 5}{x + 2}$ est plus près de $\sqrt{5}$ que x ne l'est.

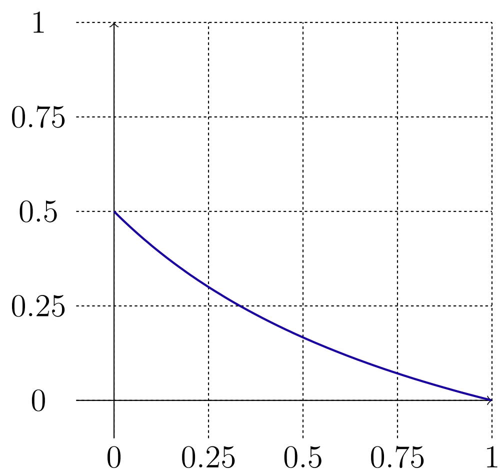
Exercice 17.
a) Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.
b) Montrer, en donnant des exemples, que la somme de deux nombres irrationnels peut être rationnelle ou irrationnelle.

Exercice 18. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. $E(x)$ désigne la partie entière de x.
a) Montrer que $E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$.
b) Montrer que $E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E(x)$.

Exercice 19. Sur le repère de gauche est représentée l'application $f_1 : [0; 1] \to [0; 1]$ et sur celui de droite l'application $f_2 : [0; 1] \to [0; 1]$.



$y = f_1(x)$



$y = f_2(x)$

Les applications f_1 et f_2 vérifient-elles les propriétés suivantes :

$P_1 : \ \forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \ f_i(x) = f_i(1)$.

$P_2 : \ \exists y_0 \in \left[\dfrac{3}{4}, 1\right], \exists x \in [0, 1], \ f_i(x) = y_0$.

$P_3 : \ \forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \exists t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \ f_i(x) = f_i(t)$.

$P_4 : \ \forall x \in [0, 1], \ f_i(x) = 0 \Rightarrow x = 1$.

Exercice 20. Soient f_1, f_2 et f_3 des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour chacune des propriétés suivantes, écrire sa négation et illustrer graphiquement la propriété et sa négation.
a) $\forall i \in \{1,2,3\}, \exists a \in \mathbb{R},\ f_i(a) = 1$.
b) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1,2,3\},\ f_i(a) = 1$.
c) $\exists i \in \{1,2,3\}, \forall a \in \mathbb{R},\ f_i(a) = 1$.
d) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists i \in \{1,2,3\},\ f_i(a) = 1$.

Exercice 21. Ecrire la négation des phrases suivantes :
a) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 < n + 1$.
b) $\forall a \in A,\ \exists b \in B, a < b^2$ et $a \leq b^3 + 1$.
c) $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x-1| < \alpha \Longrightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon$.

Exercice 22. Pour chacune des phrases suivantes dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.
a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < xy$.
b) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}, x < xy$.
c) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1$ ou $x^2 < 2$.
d) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \Rightarrow x \geq 0$.
e) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \Big(xt + y = 0 \Rightarrow x = y = 0\Big)$
f) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \Big(\forall t \in \mathbb{R}, xt + y = 0\Big) \Rightarrow x = y = 0$

Exercice 23. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ on pose $P(a,b)$ la proposition $a + b^2 = 0$.
a) La proposition $P(1,1)$ est elle vraie ? Et la proposition $P(-1,1)$?
b) La proposition "$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, P(a,b)$" est-elle vraie ?
c) La proposition "$\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, P(a,b)$" est-elle vraie ?
d) La proposition "$\exists a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, P(a,b)$" est-elle vraie ?
e) La proposition "$\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, P(a,b)$" est-elle vraie ?

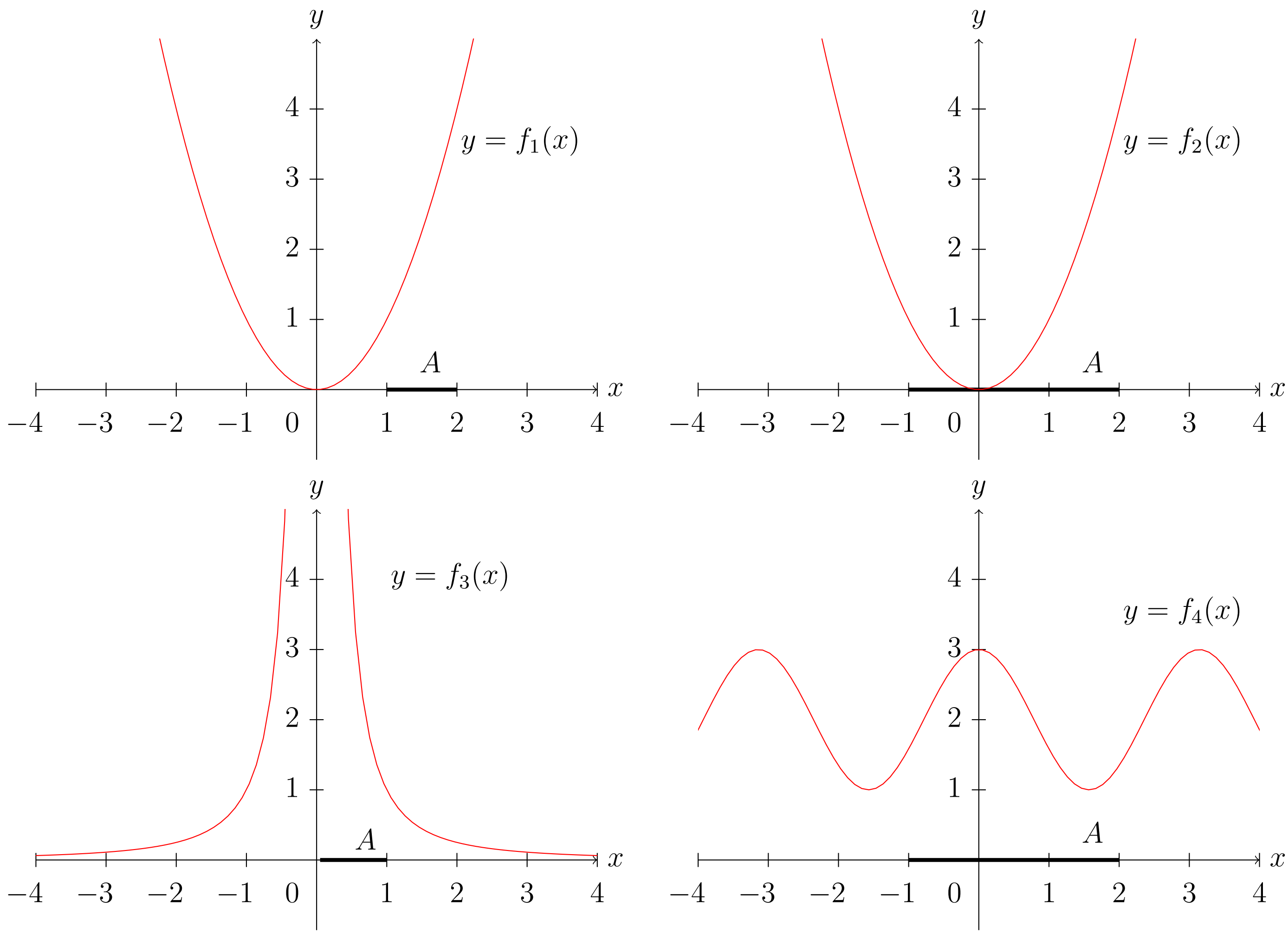
Chapitre 2 : Applications

Exercice 1. On considère trois ensembles A, B, C. Montrer que
a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
e) $(A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C) \Rightarrow (B \subset C)$.

Exercice 2. Soient $A, B \subset E$, $C, D \subset F$, et f une application de E dans F. Montrer que
a) $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$.
b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. A l'aide d'un exemple montrer que l'inclusion peut être stricte.
d) $(C \subset D) \Rightarrow (f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D))$.

e) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
f) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Exercice 3. Dans chacun des cas suivants représenter l'image directe $f_i(A)$ de A par f_i.



Exercice 4. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = 2x + 5$, est bijective et déterminer f^{-1}.

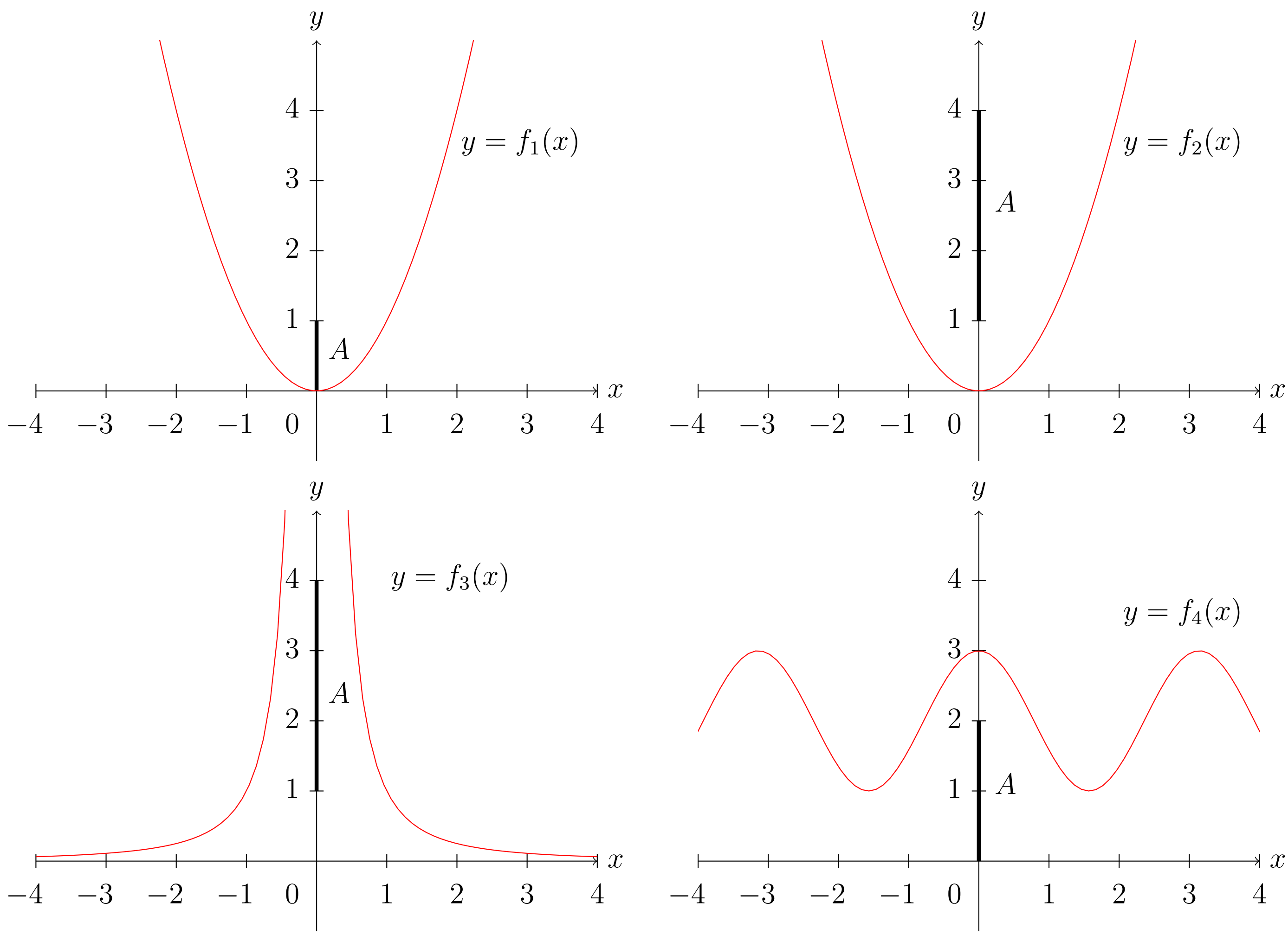
Exercice 5.
a) Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$.
b) Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x - 3| + 4$.
a) Déterminer l'image par f des sous-ensembles suivants : $[5, 7]$, $[2, 4[$ et $[-1, 2] \cup [5, 7]$.
b) Déterminer l'image réciproque par f des sous-ensembles suivants : $[3, 6]$, $[5, 7]$ et $[0, 2]$.
c) L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-elle injective ? surjective ?
d) Trouver un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ tel que $f : A \to \mathbb{R}$ soit injective.
e) Trouver un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ tel que $f : A \to [4, 5]$ soit injective.

f) Trouver un sous-ensemble B de $\mathbb{R}$ tel que $f : \mathbb{R} \to B$ soit surjective.

g) Trouver des sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$ tels que $f : A \to B$ soit bijective.

Exercice 7. Dans chaque cas représenter l'image réciproque $f_i^{-1}(A)$ de A par f_i.



Exercice 8. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que

1. si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective,
2. si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective,
3. si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$,
4. si $g \circ f$ est injective, alors f est injective,
5. si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire à l'aide de symboles logiques les propositions suivantes :

a) La fonction f est nulle.

b) La fonction f s'annule.

c) La fonction f n'est pas constante.

d) 2 n'est pas l'image d'un réel par f.

e) f prend toujours la même valeur pour des nombres opposés.
f) Aucun réel positif n'est égal à son image.

Exercice 10. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour chacune des assertions suivantes exprimer "en français" ce qu'elle signifie et écrire sa négation. Par exemple "$\forall x \in I,\ -x \in I$ et $f(-x) = f(x)$" signifie "f est paire" et sa négation est "$\exists x \in I,\ -x \notin I$ ou $f(-x) \neq f(x)$".
a) $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$.
b) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I, f(x) = y$.
c) $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ |f(x)| \leq M$.
d) $\forall (x, y) \in I^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
e) $\forall (x, y) \in I^2,\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$.

Exercice 11. Les fonctions valeur absolue et partie entière sont-elles majorées ? minorées ? bornées ? paires ? impaires ? croissantes ? décroissantes ? Dessiner leur graphe.

Exercice 12. Montrer que la fonction $\dfrac{\sin(x)}{4} + \cos(10x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Même question pour la fonction $\dfrac{\cos(x) + 4\sin(x)}{1 + \mathrm{e}^x}$.

Exercice 13. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est *lipschitzienne* de rapport M si et seulement si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

a) Montrer que la fonction g définie par $g(x) = 3x+4$ est lipschitzienne de rapport à préciser.
b) Soit f une fonction lipschitzienne de rapport M. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M|x| + |f(0)|.$$

En déduire que la fonction $\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 3 : Limites des fonctions d'une variable réelle

Exercice 1. Montrer à l'aide de la définition que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to0} \sqrt{x} = 0, \quad \lim_{x\to4} \sqrt{x} = 2.$$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + 5x - 7}{3x^3 - 2x^2 + 5}$.
b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{2x^3 + x - 4}$.
c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^4 + 3x^2 + x}{2x^3 + x^2 + 3x}$.
d) $\displaystyle\lim_{x\to0} x^2 \ln(x^4)$.
e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - x^3 + \ln(x)$.
f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x + 1}$.
g) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}{x^2 + 1}$.
i) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1}{x} + \ln(x)$.

Exercice 3. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^3}{1-x^4}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{6}{x^3-1}$.

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-4}$.

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x+3} - x$.

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{2x+3x^2}$.

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^4(x)}{x^3\ln(1+x)}$.

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$.

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{2x}$.

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{\sin(x)}-1}{2x}$.

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\big(3\sin(2x)\big)}{x}$.

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{\cos(x)}-1}{\cos(x)}$.

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\ln(1+x)}$.

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\big(\cos(2x)\big)}{\sin^2(x)}$.

n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\big(2\cos(x)\big)}{\sin^2(x)}$.

o) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x+x^2)}{x}$.

q) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(\mathrm{e}^{2x}+x^2)}{x}$.

Exercice 4. Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) Limite éventuelle en 0 de $x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

b) Limite éventuelle en 0 de $xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$ où E désigne la fonction partie entière.

c) Limite éventuelle en 0 de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 5. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

a) Ecrire à l'aide de symboles logiques “la fonction f n'admet pas de limite finie en $+\infty$”.

b) Soit f la fonction définie par $f(x)=\sin(x)$. Montrer que pour tout $A\in\mathbb{R}$, $f([A,+\infty[) = [-1,1]$.

c) En déduire que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 6.

a) Montrer que pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$ et pour tout couple de réels (x,y) appartenant à $[a,+\infty[$, on a

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| \leq \frac{1}{a^2}|x-y|.$$

b) En déduire que pour tout $x_0\in\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\alpha>0$ tel que :

$$|x-x_0|<\alpha \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon.$$

c) Écrire une formulation de la propriété précédente en termes de limite.

Exercice 7. Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et $a,l\in\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |l|$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
3. Donner un exemple de f pour laquelle $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = l$, et f ne possède pas de limite en a.

Exercice 8. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 \notin f([a, +\infty[)$.

Chapitre 4 : Continuité

Exercice 1. Pour chacune des expressions f_i ci-dessous, déterminer le plus grand sous-ensemble $D_i \subset \mathbb{R}$ sur lequel $f_i(x)$ est définie puis montrer que $f_i : D_i \to \mathbb{R}$ est continue.

a) $f_1(x) = \cos(1 + x^2)$.

b) $f_2(x) = \ln(1 + x^2)$.

c) $f_3(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

d) $f_4(x) = \sqrt{\ln x}$.

Exercice 2.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3x} - 1}{x} & \text{si} \quad x < 0, \\ \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + 1} & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$

La fonction f est-elle continue en 0 ?

b) Soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x - 1} & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ 2 & \text{si} \quad x = 1, \\ \dfrac{x + 1}{3x - 1} & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$

La fonction g est-elle continue en 1 ?

Exercice 3. Pour quelle(s) valeur(s) du réel a la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{x} & \text{si} \quad x < 0, \\[2ex] \dfrac{\ln(1 + 3x)}{2x} & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

est-elle prolongeable par continuité en 0 ? On précisera alors la valeur du prolongement de f en 0.

Exercice 4.

a) Quel est le plus grand sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}$ sur lequel l'expression $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$ est bien définie ?

On considère $f : D \to \mathbb{R}$.

b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

c) Montrer que la fonction ainsi prolongée est continue sur $[-1; 1]$.

Exercice 5. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, et soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \max(f(x), g(x))$. Montrer que h est continue. Indication : on pourra utiliser l'Exercice 14 du Chapitre 1.

Exercice 6. Soit $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction partie entière.
a) En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction E est-elle continue ?
b) En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction E est-continue à droite ?
c) Pour chacun des intervalles I suivants la fonction E est-elle continue sur I ?

$$I = [0,1], \quad I =]0,1[, \quad I = [0,1[, \quad I =]0,1].$$

d) Pour chacun des intervalles I de la question précédente la fonction $E\lceil_I$ est-elle continue ?

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq |x|$.
a) Interpréter graphiquement cette condition.
b) Montrer que f est continue en 0.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

a) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si $g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$ alors g est nulle. Indication : on rappelle que l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
b) Montrer que $f(0) = 0$.
c) On pose $\alpha = f(1)$.
  i) Montrer que $f(x) = \alpha x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$ (on pourra commencer par montrer le résultat pour $x \in \mathbb{N}$ puis $x \in \mathbb{Z}$).
  ii) Montrer que $f(x) = \alpha x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9.
a) Montrer que l'équation $x^{17} = x^{11} + 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^+$.
b) Montrer que tout polynôme P réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 10. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f([0,1]) \subset [0,1]$, i.e. pour tout $x \in [0,1]$ on a $f(x) \in [0,1]$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 11. Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et p et q deux réels strictement positifs. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que

$$pf(0) + qf(1) = (p+q)f(x_0).$$

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On considère les propriétés suivantes

$$P1\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) > 0 \text{ ou } f(x) < 0) \quad \text{et} \quad P2\ :\ (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0)\ \text{ou}\ (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0)\,.$$

a) Les propriétés $P1$ et $P2$ sont-elles équivalentes ?
b) Donner une CS simple sur la fonction f pour que $P1$ et $P2$ soient équivalentes.

Exercice 13.
a) Donner un exemple d'une fonction f définie sur $[0,1]$, non constante, telle que pour tout $x \in [0,1]$ on ait $(f(x))^2 = 1$.

b) Soit f continue sur $[0,1]$ telle que pour tout $x \in [0,1]$ on ait $(f(x))^2 = 1$. Montrer que f est constante.

c) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $x \in I$ on ait $(f(x))^2 = (g(x))^2 \neq 0$. Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 14. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$. Pour chacune des affirmations suivantes dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

a) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f prend une fois et une seule fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

b) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f prend au moins une fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

c) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est strictement monotone alors f prend une fois et une seule fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

d) Si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ est continue et bornée alors f admet un maximum et un minimum.

e) Si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ est continue et bornée alors f admet un maximum ou un minimum.

f) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et ne s'annule pas alors $\frac{1}{f}$ est bornée.

g) L'image d'un segment $[a,b]$ par une fonction continue est un segment $[c,d]$.

h) L'image d'un intervalle $]a,b[$ par une fonction continue est un intervalle $]c,d[$.

i) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si l'image de $[a,b]$ par f est un segment alors f est continue.

j) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si l'image de $[a,b]$ par f n'est pas un segment alors f n'est pas continue.

k) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et croissante alors f est injective.

l) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est telle que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que f soit décroissante sur $[M, +\infty[$.

Exercice 15. Donner un exemple de fonction f continue et définie sur $]0,1]$ telle que

a) f ne soit pas majorée.

b) f ne soit pas minorée.

c) f soit majorée mais n'a pas de maximum.

d) f soit minorée mais n'a pas de minimum.

Exercice 16. Soient f et g deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$. On veut montrer qu'il existe un point c dans $[0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$. On va raisonner par l'absurde et on suppose donc que le résultat est faux.

a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\underbrace{(\forall x \in [0,1],\ f(x) - g(x) > \alpha)}_{(1)} \quad \text{ou} \quad \underbrace{(\forall x \in [0,1],\ g(x) - f(x) > \alpha)}_{(2)}.$$

On note $f_n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois) et $g_n = g \circ g \circ \cdots \circ g$.

b) Montrer que les fonctions f_n et g_n sont continues sur $[0,1]$.

c) Dans le cas (1), montrer que "$\forall n > 0,\ \forall x \in [0,1],\ f_n(x) - g_n(x) > n\alpha$". En déduire que le cas (1) ne peut pas arriver.

d) Montrer de la même manière que le cas (2) ne peut pas arriver. Conclure.

Exercice 17. Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. La fonction f est dite *uniformément continue sur* I si elle vérifie la propriété (P) suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |x-y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

a) Quelle est la différence entre cette définition et celle de "f est continue sur I" ?
b) Montrer que si f est uniformément continue sur I alors elle est continue sur I.
c) Donner la négation de (P).
d) Montrer que la fonction définie par $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (on pourra choisir dans la négation de (P) : $\varepsilon = 1$, $x = \frac{1}{\eta}$ et $y = x + \frac{\eta}{2}$).
e) Montrer que la fonction $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur $[0,1]$.
f) On rappelle (voir l'Exercice 13 du Chapitre 2) que f est dite lipschitzienne si

$$\exists M \geq 0,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq M[x-y|.$$

Montrer que si f est lipschitzienne alors elle est uniformément continue.

Chapitre 5 : Dérivabilité

Exercice 1. En utilisant la définition, montrer que les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leur dérivée.
a) $f(x) = ax + b$ en tout $x_0 \in \mathbb{R}$.
b) $f(x) = \sqrt{x}$ en tout $x_0 > 0$. f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 2. On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.
a) En utilisant la définition, montrer que les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leur dérivée.
b) Montrer que la fonction tan est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.

Exercice 3. Pour chacune des fonctions suivantes : dire sur quel ensemble elle est définie, justifier rapidement qu'elle est dérivable et calculer sa dérivée.

a) $x^3 e^x$
b) $\dfrac{\sin(x)}{1+x^2}$
c) $\cos(3x-1)$
d) $\ln(1+x^2)$
e) $\dfrac{1}{1+\tan(x)}$
f) $\sin(x^5 + 2x)$
g) $\sin(\cos(x))$
h) $\ln(\ln(\ln(x)))$
i) $\exp(\exp(x))$
j) 2^x
k) a^x, $a \in \mathbb{R}_+^*$
l) $\sin\left(\dfrac{x^2}{\cos(x^2)}\right)$

Exercice 4. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Justifer dans chacun des cas suivants que f est dérivable et calculer f' en fonction de g'.
a) $f(x) = g(x^2 + 3x)$.
b) $f(x) = g(x + g(x))$.

Exercice 5. Étudier la dérivabilité en 0 et calculer, si elle existe, la dérivée en 0 des fonctions f et g définies par

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases} \qquad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Exercice 6. Soient g et h deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, dérivables en 0 et telles que $g(0) = h(0)$. On définit la fonction f par

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x < 0, \\ h(x) & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur g et h pour que f soit dérivable en 0 (on pourra essayer de deviner la solution en raisonnant graphiquement).

Exercice 7.
a) Quel est le plus grand ensemble $D \subset \mathbb{R}$ sur lequel l'expression $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{4-x^2}}$ est bien définie ?
On considère la fonction $f : D \to \mathbb{R}$.
b) Etudier la parité de f.
c) Etudier les variations de f. La fonction f est-elle bornée ?
d) La courbe représentative de f possède-t-elle une tangente en au point de coordonnées $(0, f(0))$? $(2, f(2))$?

Exercice 8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x^2 + 3x)\mathrm{e}^{-x}$.
a) Etudier rapidement la fonction f (sens de variation, limites aux bornes,...).
b) La fonction f possède-t-elle un maximum ? Un minimum ? Si oui les déterminer.
c) Déterminer les ensembles $f\left([-2, 1]\right)$ et $f^{-1}([0, +\infty[)$.
Mêmes questions pour les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{3x-4}{x^2+1}$ et $h = |g|$.

Exercice 9. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (justifier).
a) Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0. La réciproque ?
b) Si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 alors f est dérivable en x_0.
c) Si f est dérivable sur $]-1, 1[$ et $f'(0) = 0$ alors f admet un extremum local en 0.
d) La dérivée de $f(x) = \cos(2x)$ est $f'(x) = -\sin(2x)$.
e) On peut appliquer le théorème de Rolle à $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$. Même question avec $g(x) = 5x^2 + 3$ sur $[0, 2]$.

Exercice 10. En utilisant des théorèmes du cours, montrer que
a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.
b) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ (n+1)a^n < \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} < (n+1)b^n$.

c) Si $a_0, \dots, a_n$ vérifient $a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ alors $\exists x \in]0,1[$ tel que $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0$.

Indication : considérer la fonction f définie par $f(x) = a_0 x + a_1 \dfrac{x^2}{2} + \cdots + a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Exercice 11. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = -1$. Montrer que

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = -1$.

b) $\exists x_1 \in]0,1[,\ f(x_1) < 0$.

c) $\exists x_2 \in]0,1[,\ f(x_2) = 0$.

d) $\exists x_3 \in]0,1[,\ f'(x_3) = 0$.

Exercice 12. Soit f continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$ et telle que $f(0) = 0$ et f' soit croissante.

a) Montrer que $\forall x > 0,\ f(x) \leq x f'(x)$.

b) Soit $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Montrer que g est croissante.

Exercice 13.

a) Montrer que pour tout $x \in]0, \pi[$ on a $x \cos(x) - \sin(x) < 0$.

b) Étudier le sens de variation de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ sur l'intervalle $]0, \pi]$.

c) Soient a et b des nombres réels tels que $0 < a < b < \pi$. Montrer que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{\sin(a)}{\sin(b)}$.

Exercice 14. Soit p un entier positif.

a) Montrer que la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{(1+x)^p}{1+x^p}$ a pour maximum 2^{p-1}.

b) Soient a et b des nombres réels positifs. Montrer que $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.

Exercice 15. Soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$ avec $0 < a < b$. On suppose de plus que f est continue sur $[a, b]$ et que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe une tangente à la courbe représentative de f qui passe par l'origine. Indication : on pourra introduire la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

Exercice 16. Soit f une fonction polynômiale réelle, ayant n racines réelles distinctes. Montrer que f' en a au moins $n - 1$.

Exercice 17. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\exists C > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^2.$$

Montrer que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = 0$. Que peut-on en déduire sur f ?

Exercice 18. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, et $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ si $x > 0$.

a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et calculer f' sur chacun de ces intervalles.

b) Vérifier que f est continue en 0.

c) Montrer que f est dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?

d) Montrer que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 6 : Fonctions réciproques

Exercice 1.

a) Démontrer que la fonction réciproque d'une fonction impaire bijective est impaire.

b) Pourquoi ne peut-on pas parler de la fonction réciproque d'une fonction paire ?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$. Montrer que f est continue, bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$ et déterminer sa réciproque f^{-1} (on précisera bien l'ensemble de définition de f^{-1}).

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{2x+2} & \text{si} \quad x < -1, \\ 2x+3 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0, \\ x^2+2x+3 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

a) Tracer son graphe.

b) Montrer que f est continue et strictement croissante.

c) Donner les formules définissant sa fonction réciproque f^{-1} (en précisant bien son ensemble de définition) et tracer le graphe de f^{-1}.

Exercice 4. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ on a

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 6. Soit $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$.

a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est dérivable.

b) Calculer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.

Exercice 7.

a) Montrer que la fonction $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ est une bijection. On appelle arccos sa bijection réciproque.

b) Montrer que arccos est continue.

c) Sur quel intervalle arccos est-elle dérivable ?

d) Calculer $\arccos'(y)$.

e) Même question avec les fonctions sin et tan restreintes à $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ et $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ respectivement. On précisera d'abord l'ensemble image de chacune de ces fonctions.

Exercice 8. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan(x) + \arctan(2x)$.
a) Étudier f et tracer sa courbe représentative.
b) Montrer que f est une bijection (de quel ensemble dans quel ensemble ?) et faire l'étude de la fonction réciproque. Tracer sa courbe représentative.

Exercice 9. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(4x^3 - 3x\right)$.
a) Etudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x^3 - 3x$. Calculer $g(-1)$ et $g(1)$.
b) Déterminer le domaine de définition de f. Étudier la continuité de f.
c) Étudier sa dérivabilité.
d) Montrer que $f(x) = -3\arcsin(x)$ si $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
e) Calculer $f(x)$ pour $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Exercice 10. Comparer les fonctions définies par $f(x) = \arccos(x)$ et $g(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$.

Exercice 11. On définit les fonctions sinh, cosh et tanh pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \ \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \text{ et } \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

a) Montrer que les fonctions sinh, cosh et tanh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leur dérivée.
b) i) Montrer que la fonction sinh est impaire, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note Argsinh sa bijection réciproque.
ii) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Argsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
iii) Montrer que Argsinh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\mathrm{Argsinh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
c) i) Montrer que la fonction cosh est paire, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$. On note Argcosh sa bijection réciproque.
ii) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\mathrm{Argcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.
iii) Montrer que Argcosh est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $\mathrm{Argcosh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
d) i) Montrer que la fonction tanh est impaire, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$. On note Argtanh sa bijection réciproque.
ii) Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\mathrm{Argtanh}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
iii) Montrer que Argtanh est dérivable sur $]-1, 1[$ et que $\mathrm{Argtanh}'(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$.

Chapitre 7 : Dérivées d'ordre supérieur. Développements limités

Exercice 1. Déterminer la dérivée n-ème de la fonction $f(x) = x^n(1+x)^n$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Pour une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, on considère la propriété suivante

$$(P): \qquad \forall a, b \in \mathbb{R},\ f(b) - f(a) = (b-a) f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

a) Montrer que (P) est équivalente à (P') :

$$(P'): \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^+,\ f(t+h) - f(t-h) = 2hf'(t).$$

b) Soient $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$ et f définie par $f(x) = Ax^2 + Bx + C$. Montrer que f vérifie (P).
c) Soit f de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ vérifiant (P). Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 pour f entre $t+h$ et t, puis entre $t-h$ et t. En déduire que pour tout $d \in \mathbb{R}$ on a $f^{(3)}(d) = 0$ puis que f est un polynôme de degré au plus 2.
d) Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant (P). Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{f(x+1)-f(x-1)}{2}$. En déduire que f est de classe C^3. Conclure.
e) Interpréter graphiquement la propriété (P).

Exercice 3. Soit $g_1(x)$ la dérivée d'ordre 1 de x^2-1, $g_2(x)$ la dérivée d'ordre 2 de $(x^2-1)^2$, et pour tout entier n soit $g_n(x)$ la dérivée d'ordre n de $(x^2-1)^n$.
a) Calculer $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour $0 < p \leq n$, $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$.
b) Calculer la dérivée d'ordre p de $(x-1)^n$ puis celle de $(x+1)^n$.
c) En déduire la dérivée d'ordre p de $(x-1)^n$ en 1 et celle de $(x+1)^n$ en -1.
d) Calculer les dérivées d'ordre p en 1 et -1 de $(x^2-1)^n$, $0 \leq p \leq n$.
e) Montrer que si $n \neq 0$, $g_n(x)$ s'annule au moins n fois dans $]-1, 1[$. (Indication : utiliser d) et le Théorème de Rolle.)

Exercice 4. Soient f et g deux fonctions dont le développement limité à l'ordre 1 en 0 est donné par

$$f(x) = 1 + 3x + x\varepsilon_1(x), \quad g(x) = 2 + x + x\varepsilon_2(x).$$

Donner des développements limités à l'ordre 1 en 0 des fonctions suivantes

$$f + 4g,\ fg,\ f^2,\ \frac{1}{f},\ \frac{f}{g}.$$

Exercice 5. Pour chaque fonction f_i calculer son développement limité en 0 à l'ordre n_i.

a) $f_1(x) = (1+2x)\ln(1+x)$, $n_1 = 3$.
b) $f_2(x) = \mathrm{e}^x \ln(1+x)$, $n_2 = 3$.
c) $f_3(x) = \frac{1+2x}{1-x}$, $n_3 = 3$.
d) $f_4(x) = \mathrm{e}^x \ln(1+3x)\sqrt{1+2x}$, $n_4 = 2$.
e) $f_5(x) = \ln(1+x+x^2)$, $n_5 = 3$.
f) $f_6(x) = \sin(x\mathrm{e}^x)$, $n_6 = 3$.
g) $f_7(x) = \frac{\cos(x)}{\mathrm{e}^x}$, $n_7 = 3$.
h) $f_8(x) = \ln(1 + x\cos(x))$, $n_8 = 4$.
i) $f_9(x) = \ln(e^x + e^{-x})$, $n_9 = 4$.
j) $f_{10}(x) = \frac{\cos^2(x)}{1+x+x^2}$, $n_{10} = 4$.
k) $f_{11}(x) = \frac{\sin(x)}{\ln(1+x)}$, $n_{11} = 2$.

Exercice 6. Calculer les développements limités suivants : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ en 1 à l'ordre 2, $g(x) = \sin(\cos(x))$ en 0 à l'ordre 2 et $h(x) = \cos(x)$ en $\dfrac{\pi}{2}$ à l'ordre 6.

Exercice 7. Dans un examen récent, on demandait de donner le développement limité de la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)}$ à l'ordre 2 en 0. Un étudiant a donné comme réponse

$$f(x) = \frac{5}{2} - x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

Expliquer pourquoi le correcteur s'est immédiatement rendu compte que le résultat était faux. Expliquer comment l'étudiant a trouvé ce résultat et pourquoi sa méthode ne marche pas ! (Indication : attention au DL de l'exponentielle).

Exercice 8. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes à l'aide de développements limités.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\sin(x) - x\cos(x) - 2x}{x^5}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \cos(x) - x}{x - \ln(1+x)}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \cos(x)}{1 - \sqrt{1-x^2}}$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Exercice 9. Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer, si elle existe, la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+2h) + f(a) - 2f(a+h)}{h^2}.$$