L2-S3 MPI
2007-2008
Mathématiques-Analyse dans $\mathbb{R}^n$

TD n°5: Fonctions à valeurs vectorielles-Matrice jacobienne

Vrai ou Faux ?

Dans la suite, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f = (f^j) : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est une fonction vectorielle.

a) Si chaque composante, f_j, de f est différentiable au point x_0 alors f est différentiable au point $x_0 \in \Omega$.

b) La réciproque de a).

c) Si f est différentiable au point $x_0 \in \Omega$ et que la différentielle $Df(x_0)$ est non nulle, alors f est localement inversible au voisinage de $x_0 \in \Omega$.

d) Si f est localement inversible, alors $p = n$.

e) Si f est différentiable au point $x_0 \in \Omega$ et que la matrice jacobienne au point x_0 est inversible, alors f est localement inversible au voisinage de $x_0 \in \Omega$.

Exercice 1. Soit f une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = 3x - 2y + o(\|(x, y)\|)$ au voisinage de $(0, 0)$. Soit $g(x) = f(e^{5x} \sin x, \log(1 + x^2))$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $g'(0)$.

Exercice 2. Soit $f(x, y) = (3 \sin(xy^2), y \log(1 + x^4))$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Est ce une fonction C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Déterminer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(1, \sqrt{\pi}/2\right),$$

puis la différentielle de f au point $(1, 1)$. Est ce que la fonction f est inversible localement au voisinage de $(0, 0)$?

Exercice 3 (Examen 2006)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f = (f_1, f_2)$ où les fonctions $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont données par

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 4x + y + 5 \sin(xy) + x^3y^2, \\ f_2(x, y) &= 2y + x + x^5y^4. \end{aligned}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et que f est inversible au voisinage de $(1, 0)$.

Exercice 4 (Examen 2006 - 2e session)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par

$$f(x, y) = \left(3x + ye^x + 3 \sin(x^2y^3) + x^4y^2,\ 5xe^y + 2y + x^3y^4\right).$$

Indiquer pourquoi f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est inversible au voisinage du point $(0, 0)$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction vérifiant le développement suivant au voisinage de $(0, 0)$:

$$f(1 + h_1, h_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o\left(\|h\|\right), \quad \text{où } h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

a) Que peut on dire de la fonction f?

b) Soit $g(x) = f(3x + \cos x, \arctan(e^x - 1))$. Que vaut $g(0)$? Indiquer pourquoi g est dérivable en $x = 0$ et déterminer son vecteur dérivé.

c) Soit $h(x,y) = f(xy^2, 3e^x - 3xe^y)$. Déterminer la matrice jacobienne de h au point $(1,1)$. Pourquoi elle est bien définie? Est ce que h est inversible localement au voisnage de $(1,1)$?

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admettant des dérivée partielles continues à l'origine et telle que:

$$\forall\, a \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, t > 0, \quad f(ta) = tf(a).$$

Montrer que f est linéaire. En déduire qu'une norme N sur $\mathbb{R}^2$ ne peut pas avoir des dérivées partielles continues en $(0,0)$.

Exercice 7. On cherche toutes les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui vérifient:

$$(E) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^2, \quad 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + y.$$

a) Vérifier que $\psi(x,y) = x + 2y$ est solution du problème sans second membre.

b) Soit le changement de variable $(u,v) = T(x,y) = (x+y, x+2y)$. Montrer que T est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans lui même.

c) Posons $g(u,v) = f \circ T^{-1}(u,v)$. Montrer que f est solution de (E) ssi g vérifie $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = u$.

d) En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 8 (Examen 2006)**.** Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ et $V =]0, \infty[\, \times\,] - \pi/2, \pi/2[$. On définit la fonction: $\Psi : V \to \mathbb{R}^2$ définie par $\Psi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

a) Montrer que Ψ est une application C^1 et bijective de V sur U.

b) Montrer que $T = \Psi^{-1}$ vérifie

$$T(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ \arctan\frac{y}{x}\right).$$

c) En considérant $f = h \circ T$, trouver toutes les applications $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que:

$$\forall\, x, y \in U, \quad y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Exercice 9. Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes en utilisant le changement de fonctions ou de variables suggéré (toutes les fonctions sont de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$).

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + 3(x-y)f = 0 \quad (u = xy, v = x+y, x > y);$$

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (x = u, y = uv, x > 0).$$