L2 MIPI - S3
2015/2016
Mathématiques: intégration

TD n°4 : Intégrales doubles

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{-x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 1 \leq y \leq 4\}$.

b) $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq \pi \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$.

c) $\displaystyle\iint_D x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x \leq 3 \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$.

d) $\displaystyle\iint_D x\sin(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq y \leq x\}$.

e) $\displaystyle\iint_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq y \leq x \leq 1\}$.

Exercice 2. Calculer $I = \displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^3}$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 1,\ y \geq 1,\ x+y \leq 3\}$.

Exercice 3. Calculer

$$I = \iint_D \ln(1+x^2+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y \leq 1\}$.

Exercice 4. Pour chacune des intégrales suivantes, représenter graphiquement le domaine d'intégration puis calculer l'intégrale en utilisant un changement de variables en coordonnées polaires.

a) $\displaystyle\iint_D (x^2+2xy+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$.

b) $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}$, $D = \{(x,y),\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

c) $\displaystyle\iint_D (x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0,\, y \geq 0 \text{ et } x^2+y^2 \leq 1\}$.

d) $\displaystyle\iint_D (x^3y+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0,\, x \geq -y \text{ et } x^2+y^2 \leq 4\}$.

e) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D = \{(x,y),\ x^2+y^2-2y \leq 0\}$.

f) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D = \{(x,y),\ y > 0,\ x^2+y^2-x < 0,\ x^2+y^2-y > 0\}$.

Exercice 5. Calculer $I = \iint_D (x^3+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.

Exercice 6. Calculer $I = \iint_D (x+y)^2 \mathrm{e}^{x^2-y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$. (Indication: utiliser le changement de variables $u = x+y$ et $v = x-y$).

Exercice 7. Calculer $I = \iint_D \sqrt{xy}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x^2+y^2)^2 \leq xy\}$.

Exercice 8. Calculer $I = \iint_D x^2y^2(1-x^3-y^3)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^3+y^3 \leq 1\}$. (Indication : utiliser le changement de variables $X = x^{\frac{3}{2}}$ et $Y = y^{\frac{3}{2}}$, puis un passage en coordonnées polaires).

Exercice 9.
a) Calculer $I = \iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2,\ a^2 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$.
b) L'intégrale admet-elle une limite quand $a \to 0$?
c) Pour quelles valeurs de α l'intégrale $I_\alpha = \int_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^\alpha}$ est-elle convergente quand $a \to 0$?

Exercice 10 (Annale 2009)**.** Soit le domaine D de $\mathbb{R}^2$ tel que $(u,v) \in D$ si et seulement si

$$u, v \in [\mathrm{e}^{-2}, \mathrm{e}^2], \quad \sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}} \in [\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}].$$

On souhaite calculer l'intégrale double $I = \iint_D (u+v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

a) Enoncer la formule de changement de variables.
On définit la fonction

$$F : \begin{array}{ccc} [-1,1]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & (e^{x+y}, e^{x-y}) \end{array}.$$

b) Vérifier que F est injective et à valeurs dans D.
c) Montrer que F définit une bijection dans D.
d) Calculer le jacobien de F.
e) En utilisant le changement de variables donné par F, calculer I. (on précisera le nom du ou des outils utilisés). On pourra montrer (ou utiliser) que

$$I = 4 \iint_{[-1,1]^2} \mathrm{e}^{3x} \cosh(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$