L3 Mathématiques
2020/2021
Analyse complexe

TD 2 : Séries de Fourier

Exercice 1. On considère la série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \sin(nx)$.

a) Montrer que cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$. On note $g(x)$ sa somme.
b) Calculer $g(x)$. Indication : $\sin(\theta) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{i\theta})$.
c) Quelle est la série de Fourier de g ?

Exercice 2. [Critères d'Abel]
a) Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres complexes. On notera $(V_n)_n$ la suite des sommes partielles de la suite $(v_n)_n$, i.e. $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ avec la convention $V_{-1} = 0$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_n V_n + \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k.$$

Cette transformation est appelée transformation d'Abel.
b) On suppose que

1. $(u_n)_n$ est réelle, décroissante et tend vers 0,
2. la suite des sommes partielles $(V_n)_n$ est bornée.

Montrer que la série de terme général $u_n v_n$ converge. On appelle ça le critère d'Abel. C'est une généralisation du critère des séries alternées. Ce dernier correspond en effet au cas particulier $v_n = (-1)^n$.
c) On suppose maintenant que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont des suites de fonctions définies sur un intervalle I et on suppose que

1. pour tout n la fonction u_n est à valeurs réelles,
2. pour tout $x \in I$ la suite $(u_n(x))_n$ est décroissante,
3. la suite $(u_n)_n$ converge uniformément vers 0,
4. la suite des sommes partielles $(V_n)_n$ est uniformément bornée, i.e. il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|V_n(x)| \leq M$.

Montrer que la série de fonctions $\sum u_n(x) v_n(x)$ converge uniformément sur I. On appelle ça le critère d'Abel uniforme.

Exercice 3. Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des séries trigonométriques

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n^\alpha}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha},$$

où $\alpha \in]0,1]$. Lorsqu'elles convergent on notera respectivement $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ leur somme.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $\delta > 0$ les séries convergent uniformément sur $I_{k,\delta} = [2k\pi + \delta, 2(k+1)\pi - \delta]$. Indication : on pourra essayer d'appliquer le critère d'Abel uniforme.

b) En déduire que les fonctions f,g et h sont bien définies et continues sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

c) Les séries convergent-elles simplement sur $\mathbb{R}$? Normalement sur $\mathbb{R}$? Normalement sur les intervalles $I_{k,\delta}$?

Exercice 4. Le but de l'exercice est de montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que l'intégrale converge. Indication : pour la convergence en $+\infty$ on pourra commencer par faire une intégration par parties.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction $D_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikx}$.

i) Montrer que $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi$.

ii) Montrer que $D_n(x) = 2n+1$ si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $D_n(x) = \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$ sinon.

c) Soit f la fonction définie sur $[-\pi,\pi] \setminus \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sin(\frac{x}{2})} - \dfrac{2}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Indication : on pourra faire un DL3 de la fonction $\sin$.

d) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\,\mathrm{d}x = 0$. Rappel : $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

e) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Remarque : les fonctions D_n sont appelées les noyaux de Dirichlet (cf polycopié du cours, Section 1.4.1).

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \max(\sin(x), 0)$.

a) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 3\pi]$.

b) Calculer les coefficients de Fourier de f. On pourra au choix utiliser les coefficients exponentiels ou trigonométriques.

c) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.

d) Justifier rapidement que les séries suivantes convergent et calculer leur somme :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}.$$

Exercice 6. Soit f la fonction 2π-périodique, impaire, définie sur $[0,\pi]$ par $f(x)=x(\pi-x)$.
a) Vérifier que f est continue et C^1 par morceaux. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi,3\pi]$.
b) Calculer les coefficients de Fourier de f.
c) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.
d) Justifier rapidement que les séries suivantes convergent et calculer leur somme :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3},\quad \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^6}\quad\text{et}\quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^6}.$$

Exercice 7. Soient $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et f la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi,\pi]$ par $f(x)=\mathrm{e}^{i\alpha x}$.
a) Vérifier que f est C^1 par morceaux.
b) Déterminer les coefficients de Fourier exponentiels de f.
c) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.
d) Calculer $S(f)(\pi)$ et montrer que

$$\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}=\pi\frac{\cos(\alpha\pi)}{\sin(\alpha\pi)},\qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.$$

e) Justifier que pour tout $x\in]0,\pi[$ on a

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)}-\frac{1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}.\tag{1}$$

Soit $g:[0,\pi[\to\mathbb{R}$ définie par $g(t)=\dfrac{\cos(t)}{\sin(t)}-\dfrac{1}{t}$ si $t\neq 0$ et $g(0)=0$.
f) Justifier que la série apparaissant dans le membre de droite de (1) converge normalement vers g sur tout intervalle $[0,x]$ avec $x<\pi$. (Cela prouve en particulier que g est continue en 0.)
g) En intégrant soigneusement (1) montrer que pour tout $x\in]0,\pi[$ on a

$$\frac{\sin(x)}{x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

En déduire que pour tout $x\in]-\pi,\pi[$ on a $\sin(x)=x\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.
Remarque : ce développement du sinus en produit infini est dû à Euler.

Exercice 8. Soit f une fonction 2π-périodique continue et C^1 par morceaux telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(t)\,\mathrm{d}t=0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t\leq\int_0^{2\pi}|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 9. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| = 1$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Q}$ et $(z_k)_k$ la suite définie par récurrence par $z_{k+1} = \mathrm{e}^{i\alpha} z_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (l'application $R_\alpha : z \mapsto \mathrm{e}^{i\alpha} z$ correspond à la rotation de centre O et d'angle α).

a) Montrer que si $P(x) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{inx}$ est un polynôme trigonométrique alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} P(\theta + \alpha k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Justifier que si $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ est continue alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(\mathrm{e}^{it})$ est continue et 2π-périodique.

c) Montrer que pour toute fonction continue $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ et tout $z_0 \in \mathbb{U}$ on a

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(z_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{e}^{it}\right)\,\mathrm{d}t.$$

Indication : on pourra considérer la fonction g de la question précédente et utiliser le Théorème de Weierstrass.

d) Si $\alpha = 2\pi \dfrac{p}{q} \in 2\pi\mathbb{Q}$ avec p et q premiers entre eux déterminer $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(z_k)$.