L3 Mathématiques
2020/2021
Analyse complexe

TD 3 : Fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe. On définit $h(z) = \overline{z}$ et $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$.
a) Montrer que g et h sont continues sur $\mathbb{C}$.
b) Montrer que h n'est pas holomorphe.
c) Montrer que g est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes et $z_0 \in \Omega$. On suppose que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ et $g'(z_0) \neq 0$. Montrer que $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$.
Application : déterminer $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z^{12} + 2z^2 + 1}{z^8 - 1}$.

Exercice 3 (Fonction racine carrée complexe)**.** . Si $z \in \mathbb{C}$ on appelle racine carrée de z tout nombre complexe w tel que $w^2 = z$.
a) Montrer que tout nombre complexe non nul a exactement deux racines carrées. Qu'en est-il de $z = 0$?
b) Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $g : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $g(z)^2 = z$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer que si g est holomorphe alors $0 \notin \Omega$.
c) On suppose maintenant que $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ est un ouvert et que $g : \Omega \to \mathbb{C}$ est continue et vérifie $g(z)^2 = z$ pour tout $z \in \Omega$.
 i) Montrer que g ne s'annule pas et donner la forme de $g\left(re^{i\theta}\right)$ lorsque $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
 ii) Montrer que g est holomorphe et déterminer g'.
 iii) Si $\mathbb{R}_+^* \subset \Omega$ que peut-on dire de $g\lceil_{\mathbb{R}_+^*}$?
 iv) Donner un exemple de telle fonction g tel que $g\lceil_{\mathbb{R}_+^*} = \sqrt{\ }$ et $g(-1) = i$.
 v) Donner un exemple de telle fonction g tel que $g\lceil_{\mathbb{R}_+^*} = \sqrt{\ }$ et $g(-1) = -i$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)^2$, i.e. si $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ alors $f(z) = x + iy^2$. On considère également $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\tilde{f}(x, y) = (\mathrm{Re}(f(x+iy)), \mathrm{Im}(f(x+iy)))$.
a) Prouver que $\tilde{f}$ est différentiable. Quelle est sa différentielle ?
b) Existe t-il un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$ tel que f soit holomorphe sur U ?

Exercice 5. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ on pose $P(z) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les nombres a, b, c pour qu'il existe f holomorphe sur $\mathbb{C}$ vérifiant $P = \mathrm{Re}(f)$.

b) La condition précédente étant supposée remplie, déterminer toutes les applications f holomorphes sur $\mathbb{C}$ telles que $\mathrm{Re}(f) = P$.

Exercice 6. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine non vide et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On pose $P = \mathrm{Re}(f)$ et $Q = \mathrm{Im}(f)$. On suppose qu'il existe $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^3)^*$ tel que, pour tout $z \in \Omega$, on a $aP(z) + bQ(z) + c = 0$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 7. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine non vide et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

a) Montrer que si f est à valeurs réelles alors f est constante.

b) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- **i)** f est constante.
- **ii)** $P = \mathrm{Re}(f)$ est constante.
- **iii)** $Q = \mathrm{Im}(f)$ est constante.
- **iv)** $\overline{f}$ est holomorphe.
- **v)** $|f|$ est constante.

c) Soient $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes telles que $|f(z)| = |g(z)|$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer que si f ne s'annule pas alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = \mathrm{e}^{i\alpha} g(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

d) Soient $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes telles que g ne s'annule pas et $f(z)\overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = cg(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

Exercice 8. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on définit $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $P(x, y) = \mathrm{Re}(f(x + iy))$ et $Q(x, y) = \mathrm{Im}(f(x + iy))$ de façon à ce que $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$. Lorsqu'elles existent on pose alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x + iy) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x + iy) = \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) + i\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x, y)$. Enfin on définit

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

a) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ pour chacune des fonctions suivantes : $f_1(z) = z$, $f_2(z) = \bar{z}$, $f_3(z) = z^2$, $f_4(z) = \overline{z}^2$.

b) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Montrer que f est holomorphe si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. Calculer alors $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

c) Soient $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de classe C^1. Déterminer $\dfrac{\partial fg}{\partial \overline{z}}$.

d) Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Calculer $\dfrac{\partial(z^m \overline{z}^n)}{\partial \overline{z}}$. On pourra commencer par traiter les cas $m = 0$ ou $n = 0$.

e) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe. Montrer que les parties réelles et imaginaires P et Q sont des polynômes en x, y si et seulement si f est une fonction polynôme en z.