CY Cergy Paris Université
Département de Mathématiques
L3 Maths - S5
2020/2021

Séries de Fourier et Analyse Complexe

TABLE DES MATIÈRES

1 Séries de Fourier **5**
- 1.1 Introduction . . . 5
- 1.2 Polynômes et séries trigonométriques . . . 8
  - 1.2.1 Préliminaires : fonctions périodiques, continues ou C^1 par morceaux . . . 8
  - 1.2.2 Polynômes trigonométriques . . . 12
  - 1.2.3 Séries trigonométriques . . . 15
- 1.3 Série de Fourier d'une fonction périodique. . . . 18
  - 1.3.1 Coefficients de Fourier . . . 18
  - 1.3.2 Meilleure approximation en moyenne quadratique : l'inégalité de Bessel 23
- 1.4 Convergence des séries de Fourier . . . 25
  - 1.4.1 Le théorème de Dirichlet . . . 25
  - 1.4.2 Approximation uniforme . . . 28
  - 1.4.3 Convergence en moyenne quadratique. Formule de Parseval . . . 29
  - 1.4.4 Les fonctions T-périodiques . . . 32
- 1.5 Compléments . . . 34
  - 1.5.1 Le théorème de Fejér . . . 34
  - 1.5.2 Transformation d'Abel et convergence des séries trigonométriques . . . 38

2 Fonctions d'une variable complexe **41**
- 2.1 Topologie et convergence dans $\mathbb{C}$ . . . 41
  - 2.1.1 Module et distance . . . 41
  - 2.1.2 Boules, ouverts et fermés . . . 42
  - 2.1.3 Convergence de suites . . . 43
  - 2.1.4 Compacité . . . 44
  - 2.1.5 Connexité par arcs . . . 44
- 2.2 Fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ . . . 45
  - 2.2.1 Limites . . . 45
  - 2.2.2 Continuité . . . 46
  - 2.2.3 Dérivabilité . . . 46
- 2.3 Dérivabilité dans $\mathbb{C}$ - Différentiabilité dans $\mathbb{R}^2$ . . . 48

3 Fonctions définies par une série entière **53**
3.1 Suites et séries de fonctions de la variable complexe 53
3.2 Séries entières 55
3.3 La fonction exponentielle 61
3.4 Logarithme complexe 65

4 Fonctions analytiques **69**
4.1 Séries entières et fonctions analytiques 69
4.2 Zéros isolés et prolongement analytique 70
4.3 Analyticité des fonctions C^1 73
4.4 Théorème de Liouville et principe du maximum 78

5 Holomorphie et analyticité **81**
5.1 Intégrale le long d'un chemin 81
5.2 Fonctions holomorphes, primitives et analyticité 86
5.3 Indice d'un point par rapport à un chemin fermé 93
5.4 Formule de Cauchy - le cas général 96
5.5 Compléments : suites et séries de fonctions holomorphes, fonctions définies par une intégrale 97

6 Fonctions méromorphes **101**
6.1 Singularités isolées 101
6.2 Fonctions méromorphes et résidus 104
6.3 Séries de Laurent et singularités essentielles 112

CHAPITRE 1

SÉRIES DE FOURIER

1.1 Introduction

L'idée des séries de Fourier peut se placer dans le cadre un peu plus général et formulé de façon assez imprécise suivant : approcher, voir "développer", toutes les fonctions d'une certaine classe à l'aide de fonctions plus simples.

Vous avez vu en L1 qu'une fonction régulière (disons C^∞) peut être approchée par des polynômes, c'est l'idée des développements limités. De plus les coefficients de ce développement s'obtiennent par la formule deTaylor. Si $f : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est C^∞ et $a \in I$ alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(N)}(a)}{N!}h^N + o(h^N) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^N).$$

Ici bien sûr l'idée d'approximation est assez vague puisqu'on ne sait pas grand chose sur le terme de reste $o(h^N)$.

Dans certains cas on peut aller plus loin et écrire, pour $|h| < R$ avec $R > 0$ à préciser,

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n.$$

Ce sont les fonctions développables en séries entières. Elles joueront un rôle important dans la suite du cours. On y reviendra dans le Chapitre 3.

Il y a cependant des fonctions pour lesquelles un développement en puissances de h n'est pas le plus naturel, ni le plus adapté. On va s'intéresser dans ce chapitre au cas des fonctions périodiques.

Définition 1.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $T > 0$. On dit que f est T-périodique, ou pérodique de période T, si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x+T) = f(x)$.*

Remarque 1.1. *Pour connaitre une fonction T-périodique il faut et il suffit de la connaitre sur un intervalle semi-ouvert de longueur T, i.e. un intervalle de la forme $[a, a+T[$ ou bien $]a, a+T]$. Un tel intervalle est appelé une période.*

Proposition 1.1. *Soit $T > 0$. L'ensemble des fonctions T-périodiques à valeurs réelles, resp. complexes, est un $\mathbb{R}$-ev, resp. un $\mathbb{C}$-ev.*

Exercice 1.1. *Démontrez la proposition.*

La proposition ci-dessus assure qu'une combinaison linéaire de fonctions $T-$périodiques est encore T-périodique. La question centrale de ce chapitre est essentiellement de savoir si une sorte de réciproque est vraie : peut-on décomposer n'importe quelle fonction périodique comme une combinaison linéaire de fonctions périodiques élémentaires qu'il faudra préciser. Cette idée de décomposer une fonction périodique (ou signal) comme combinaison linéaire de fonctions périodiques élémentaires remonte au milieu du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle (par D'Alembert, Euler, Bernoulli) et à l'étude des cordes vibrantes. Elle sera formalisée un peu plus tard par Fourier dans les années 1820 dans ses travaux sur la propagation de la chaleur.

Lorsqu'on pense fonctions périodiques les premiers exemples qui viennent à l'esprit sont ceux des fonctions sinus et cosinus. Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fonctions $x \mapsto \sin(nx)$ et $x \mapsto \cos(nx)$ sont 2π-périodiques, à valeur dans $\mathbb{R}$. Si on s'intéresse aux fonctions à valeurs complexes on considèrerait de même, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{inx}$ qui sont 2π-périodiques à valeur dans $\mathbb{C}$. L'idée des séries de Fourier est de savoir si on peut décomposer une fonction 2π-périodique comme "combinaison linéaire" des fonctions $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$ ou bien e^{inx}, mais aussi, et surtout, comment trouver les coefficients d'une telle décomposition (dans le cas des séries entières par exemple le coefficient en h^n est $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$). Vous noterez que l'expression "combinaison linéaire" est entre guillemets. En effet ce que l'on va faire n'est pas une combinaison linéaire au sens de l'algèbre linéaire, tel que vous l'avez vue en L1-L2, où une combinaison linéaire est par définition une somme *finie*. On va faire ici des *combinaisons linéaires infinies*, i.e. des séries.

Remarque 1.2. *Le fait que* $\mathrm{e}^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$ *d'une part et* $\cos(nx) = \frac{\mathrm{e}^{inx}+\mathrm{e}^{-inx}}{2}$ *et* $\sin(nx) = \frac{\mathrm{e}^{inx}-\mathrm{e}^{-inx}}{2i}$ *d'autre part montre qu'il est totalement équivalent de décomposer en terme de* $\sin(nx)$ *et* $\cos(nx)$ *ou en termes de* e^{inx}, $n \in \mathbb{Z}$.

Pourquoi les fonctions $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$?

La première réponse, un peu naive et pas très convaincante, est : *parce que ce sont les plus simples et les premières auxquelles on a pensé*. La deuxième réponse, a priori un peu plus convaincante, est : *parce que ça marche* ! C'est vrai. Mais on verra que d'une part ça demande tout de même quelques hypothèses et pas mal de travail, et d'autre part ça n'explique toujours pas *de où vient cette idée* ni fondamentalement *pourquoi ça marche*. On donne ici une très bref aperçu de l'origine de cette idée.

Fourier s'est intéressé, entre autres choses, à la propagation de la chaleur. On considère ici le cas simple, et simplifié, d'une barre de métal de longueur L que l'on va supposer égale à π (il suffit de choisir la bonne unité de longueur pour que la longueur de la barre soit $L = \pi$). On va noter $\theta(t, x)$ la température de la barre à l'instant $t \geq 0$ et au point d'abscisse $x \in [0, \pi]$. L'équation qui décrit l'évolution de la température dans la barre au cours du temps s'écrit

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(t, x) = D\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(t, x), \qquad \forall t \geq 0,\ \forall x \in [0, \pi], \tag{1.1}$$

où $D > 0$ est une constante appelée constante de diffusion. Cette équation est appelée équation de la chaleur. A cela il faut ajouter la connaissance de la température initiale

$\theta(0,x)$ et des conditions dites “au bord” : que se passe-t-il en $x=0$ et en $x=\pi$. On peut considérer deux types de conditions :

1. A partir de l'instant $t=0$ la barre est isolée dans le sens où il n'y a plus d'apport de chaleur extérieur. Le flux de chaleur $F(t,x)$ est proportionnel à la variation de température dans la barre, i.e. $F(t,x)=-a\dfrac{\partial\theta}{\partial x}(t,x)$ avec $a>0$ (la chaleur va du chaud vers le froid). Si la barre est isolée il ne peut pas y avoir de flux de chaleur aux extrémités et donc pour tout t on doit avoir $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}(t,0)=\dfrac{\partial\theta}{\partial x}(t,\pi)=0$. On parle de conditions aux bords de Neumann.
2. A partir de l'instant $t=0$ les extrêmités de la barre sont maintenues à des températures constantes θ_0 et θ_π, i.e. $\theta(t,0)=\theta_0$ et $\theta(t,\pi)=\theta_\pi$ pour tout $t\geq 0$. On peut alors remarquer que la fonction θ est solution si et seulement si la fonction $\tilde\theta(t,x)=\theta(t,x)-\frac{\theta_\pi-\theta_0}{\pi}x-\theta_0$ est solution et vérifie $\tilde\theta(t,0)=\tilde\theta(t,\pi)=0$ pour tout $t\geq 0$. Quitte à d'abord considérer $\tilde\theta$ on peut donc supposer que les températures des extrêmités sont nulles toutes les deux, i.e. $\theta(t,0)=\theta(t,\pi)=0$ pour tout t. On parle de conditions aux bords de Dirichlet.

Une remarque que l'on peut ensuite faire sur cette équation c'est qu'elle est linéaire, dans le même sens que les équations différentielles linéaires que vous avez vues en L1 : si on a plusieurs solutions de l'équation alors tout combinaison linéaire des ces solutions est encore une solution de l'équation. On va donc commencer par chercher des solutions “simples”. La difficulté ici est que la fonction inconnue est une fonction de deux variables. Bien entendu la fonction nulle est solution, voyons si on peut en trouver d'autres. L'idée est alors de commencer par chercher une solution sous la forme d'un produit de fonctions d'une variable, i.e. $\theta(t,x)=f(t)g(x)$. L'équation devient alors

$$f'(t)g(x)=Df(t)g''(x),\qquad \forall t\geq 0,\ \forall x\in[0,\pi]. \tag{1.2}$$

Si on veut que θ ne soit pas la fonction nulle la fonction g ne peut pas être identiquement nulle. En prenant x_0 tel que $g(x_0)\neq 0$ on constate alors que nécessairement f vérifie une équation de la forme $f'(t)=\alpha f(t)$, avec $\alpha=D\frac{g''(x_0)}{g(x_0)}$. Ainsi on doit avoir

$$f(t)=C\mathrm{e}^{\alpha t},\quad \forall t\geq 0,$$

où $C\in\mathbb{R}^*$ (si $C=0$ la fonction f est nulle et donc la fonction θ aussi). A priori α est quelconque (il dépend quand même de g). Cependant en remplaçant l'expression trouvée pour f dans l'équation (1.2) on obtient alors

$$C\alpha\mathrm{e}^{\alpha t}g(x)=DC\mathrm{e}^{\alpha t}g''(x)\iff \alpha g(x)=Dg''(x),$$

dont la forme des solutions dépend du signe de α :

- Si $\alpha>0$ alors g est de la forme $g(x)=A\mathrm{e}^{x\sqrt{\alpha/D}}+B\mathrm{e}^{-x\sqrt{\alpha/D}}$. On peut alors voir que les conditions aux bords de Neumann ou de Dirichlet ne sont vérifiées que si $A=B=0$, i.e. g est la fonction nulle.
- Si $\alpha=0$ alors g est de la forme $g(x)=Ax+B$. A nouveau les conditions aux bords de Dirichlet ne sont vérifiées que si $A=B=0$, i.e. g est la fonction nulle, tandis que les conditions aux bords de Neumann sont vérifiées ssi $A=0$, i.e. g est une fonction constante, et alors $\theta(t,x)$ est constante aussi (g est constante et f aussi puisque $\alpha=0$).

- Si $\alpha < 0$ alors g est de la forme $g(x) = A\cos(x\sqrt{-\alpha/D}) + B\sin(x\sqrt{-\alpha/D})$.
Les conditions aux bords de Dirichlet sont vérifiées ssi $A = 0$ et $B\sin(\pi\sqrt{-\alpha/D}) = 0$. On ne peut obtenir une solution non nulle que si $\sin(\pi\sqrt{-\alpha/D}) = 0$, i.e. $\sqrt{-\alpha/D} = n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas $g(x) = B\sin(nx)$ et $\theta(t,x) = C\mathrm{e}^{-Dn^2t}\sin(nx)$.
Les conditions aux bords de Neumann sont vérifiées ssi $B = 0$ et $A\sqrt{-\alpha/D}\sin(\pi\sqrt{-\alpha/D}) = 0$. On ne peut obtenir une solution non nulle que si $\sin(\pi\sqrt{-\alpha/D}) = 0$, i.e. $\sqrt{-\alpha/D} = n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas $g(x) = A\cos(nx)$ et $\theta(t,x) = C\mathrm{e}^{-Dn^2t}\cos(nx)$.

Exercice 1.2. *Montrez les affirmations ci-dessus.*

Conclusion. Dans le cas des conditions aux bords de Dirichlet on trouve des solutions de la forme $\mathrm{e}^{-Dn^2t}\sin(nx)$. En faisant des “combinaisons linéaires” on va donc chercher des solutions de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\mathrm{e}^{-Dn^2t}\sin(nx)$ où les b_n doivent être tels que $\theta(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx)$.
Dans le cas des conditions de Neumann on trouve des solutions de la forme $\mathrm{e}^{-Dn^2t}\cos(nx)$. En faisant des “combinaisons linéaires” on va donc chercher des solutions de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\mathrm{e}^{-Dn^2t}\cos(nx)$ (le terme $n = 0$ correspond au cas $\alpha = 0$ et aux fonctions constantes) où les a_n doivent être tels que $\theta(0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(nx)$. On voit ainsi apparaitre cette idée de décomposition en terme des fonctions $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$.

Et les fonctions T-périodiques alors ? Ce qu'on fait ci-dessus marche bien pour les fonctions 2π-périodiques. Ce n'est en fait pas restrictif du tout et on peut facilement s'y ramener. Si f est une fonction T-périodique on vérifie alors facilement que la fonction g définie par $g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ est 2π-périodique. Ainsi, si on peut décomposer g sous la forme $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$ on pourra écrire, en remarquant que $g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ pour tout x si et seulement si $f(t) = g(\omega t)$ pour tout t avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t).$$

Le nombre ω est appellée la fréquence.

Dans la majeure partie du chapitre on se concentrera donc sur les fonctions 2π-périodiques. On reviendra brièvement aux fonctions T-périodiques avec $T > 0$ quelconque dans la Section 1.4.4.

1.2 Polynômes et séries trigonométriques

1.2.1 Préliminaires : fonctions périodiques, continues ou C^1 par morceaux

Mis à part dans la section 1.4.4, et sauf mention contraire, les fonctions périodiques considérées dans ce chapitre seront **toutes 2π-périodiques**. On aura cependant besoin de temps à autres d'hypothèses supplémentaires. En particulier on sera amené à calculer des intégrales de ces fonctions. On va donc se placer dans un cadre qui permette de calculer ces intégrales. On n'aura affaire ici qu'à des intégrales sur des segments. Il suffira donc d'imposer aux fonctions d'être continues par morceaux. Cependant certains résultats demanderont des hypothèses un peu plus fortes. On précise ici les notations qu'on utilisera par la suite.

Même si les fonctions considérées seront parfois à valeurs réelles il sera pratique de les voir comme des fonctions à valeurs complexes. Pour ces fonctions les notions de limite, continuité, dérivabilité sont les mêmes que pour les fonctions à valeurs réelles. On vérifie par exemple facilement que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, la fonction f est dérivable si et seulement si les fonctions $\mathrm{Re}(f):x\mapsto \mathrm{Re}(f(x))$ et $\mathrm{Im}(f):x\mapsto \mathrm{Im}(f(x))$ sont dérivables. On a alors $f'(x)=\mathrm{Re}(f)'(x)+i\mathrm{Im}(f)'(x)$.

Notation. $C^0_{2\pi}$, resp. $C^1_{2\pi}$, désignera l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (à valeurs complexes), resp. C^1 sur $\mathbb{R}$, et 2π-périodiques.

Définition 1.2. *Soient $a<b$ et $f:[a,b]\to\mathbb{C}$. On dit que f est* continue par morceaux *sur $[a,b]$ s'il existe $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ tels que*

1. *f est continue sur chaque intervalle $]x_k,x_{k+1}[$,*
2. *les limites $\displaystyle\lim_{x\to x_k^-} f(x)$, $k=1,\dots,n$, et $\displaystyle\lim_{x\to x_k^+} f(x)$, $k=0,\dots,n-1$, existent dans $\mathbb{C}$.*

L'ensemble $\{x_0,\dots,x_n\}$ est appelée une subdivision adaptée à f.

Remarque 1.3. *De façon équivalente f est continue par morceaux si pour tout intervalle $[x_k,x_{k+1}]$ il existe une fonction continue $f_k:[x_k,x_{k+1}]\to\mathbb{C}$ qui coïncide avec f sur $]x_k,x_{k+1}[$.*

Définition 1.3. *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. On dit que f est continue par morceaux si pour tout segment $[a,b]$ la fonction f est continue par morceaux sur $[a,b]$.*

Lorsque la fonction est en plus périodique il suffit de regarder ce qu'il se passe sur une période. Une fonction 2π-périodique est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue par morceaux sur $[0,2\pi]$.

Enfin on aura besoin également de la notion de fonction C^1 par morceaux.

Définition 1.4. *Soient $a<b$ et $f:[a,b]\to\mathbb{C}$. On dit que f est C^1* par morceaux *sur $[a,b]$ s'il existe $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ tels que*

1. *f est C^1 sur chaque intervalle $]x_k,x_{k+1}[$,*
2. *les limites $\displaystyle\lim_{x\to x_k^-} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to x_k^-} f'(x)$, pour $k=1,\dots,n$, et $\displaystyle\lim_{x\to x_k^+} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to x_k^+} f'(x)$, pour $k=0,\dots,n-1$, existent dans $\mathbb{C}$.*

L'ensemble $\{x_0,\dots,x_n\}$ est appelée une subdivision adaptée à f.

Remarque 1.4. *De façon équivalente f est C^1 par morceaux si pour tout intervalle $[x_k,x_{k+1}]$ il existe une fonction $f_k:[x_k,x_{k+1}]\to\mathbb{C}$ de classe C^1 et qui coïncide avec f sur $]x_k,x_{k+1}[$.*

Définition 1.5. *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. On dit que f est C^1 par morceaux si pour tout segment $[a,b]$ la fonction f est C^1 par morceaux sur $[a,b]$.*

Ici encore, lorsqu'on la fonction est en plus périodique, il suffit de regarder ce qu'il se passe sur une période. Une fonction 2π-périodique est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est C^1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$.

Notation. $C^0_{2\pi,m}$, resp. $C^1_{2\pi,m}$, désignera l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, resp. C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, et 2π-périodiques.

Exemple 1.1. *Soit f la fonction 2π-périodique impaire définie sur $]0, \pi[$ par $f(x) = 1$. Par imparité on a forcément $f(x) = -1$ sur $]-\pi, 0[$ et $f(0) = 0$. Enfin, puisque f est impaire on a $f(-\pi) = -f(\pi)$ tandis que comme f est périodique on a $f(-\pi) = f(\pi)$. Cela impose $f(\pi) = f(-\pi) = 0$. On connait donc f sur $[-\pi, \pi]$ et donc sur $\mathbb{R}$. Sur chaque intervalle de la forme $]k\pi, (k + 1)\pi[$ la fonction f est C^1 et les fonctions f et f' admettent des limites finies par valeurs inférieures et supérieures en chaque $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Conclusion : f est C^1 par morceaux*

Exercice 1.3. *Montrer que les ensembles $C^0_{2\pi,m}$ et $C^1_{2\pi,m}$ sont bien des espaces vectoriels.*

Les intégrales des fonctions périodiques joueront un rôle important dans ce chapitre. On rappelle que si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux on définit $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{d}x + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{d}x$.

Proposition 1.2. *Soit $f \in C^0_{2\pi,m}$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$. Autrement dit, la valeur de l'intégrale d'une fonction périodique sur une période ne dépend pas du choix de la période.*

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a < 2k\pi \le a + 2\pi$, c'est $k = E\left(\frac{a}{2\pi} + 1\right)$. On écrit alors

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{2k\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2k\pi}^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x && \text{(Chasles)}\\
&= \int_{a-2(k-1)\pi}^{2\pi} f(t + 2(k-1)\pi)\,\mathrm{d}t + \int_0^{a-2(k-1)\pi} f(t + 2k\pi)\,\mathrm{d}t && \text{(chgt de variable)}\\
&= \int_{a-2(k-1)\pi}^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{a-2(k-1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t && (f \text{ périodique})\\
&= \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x. && \text{(Chasles)}
\end{aligned}$$

□

Remarque 1.5. *La valeur d'une intégrale ne change pas lorsqu'on modifie la valeur d'une fonction* en un nombre fini de points, *i.e. si $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ et $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ sont tels que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. En particulier, si $f \in C^0_{2\pi,m}$ et $\{x_0, \dots, x_n\}$ est une subdivision adaptée à f sur $[0, 2\pi]$ alors $\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ ne dépend pas de la valeur de f aux points x_k, $k = 0, \dots, n$.*

Remarque 1.6. *Si $f \in C^1_{2\pi,m}$ et $\{x_0, \ldots, x_n\}$ est une subdivision adaptée dans $[0, 2\pi]$ alors la fonction f' est définie et continue sauf éventuellement en les points de la forme $x = x_k + 2m\pi$ où $k \in \{0, \ldots, n\}$ et $m \in \mathbb{Z}$. Il sera parfois pratique de prolonger f' en ces points là. Quelles que soient les valeurs que l'on donne à f' en $x_0, \ldots, x_n$ la fonction f' sera continue par morceaux et toute intégrale faisant apparaitre la fonction f' ne dépendra pas de la valeur choisie en ces points.*

Un peu d'algèbre linéaire. Afin de comprendre ce qu'on va faire sur les séries de Fourier il est important (indispensable) d'avoir un point de vue un peu plus algébrique. L'application suivante va jouer un rôle fondamental dans ce qu'on va faire :

$$C^0_{2\pi} \times C^0_{2\pi} \ni (f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) \, \mathrm{d}x =: \langle f, g \rangle. \tag{1.3}$$

Il est facile de voir qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tous $f, g, h \in C^0_{2\pi}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $\langle f, g + \lambda h \rangle = \langle f, g \rangle + \lambda \langle f, h \rangle$ et $\langle f + \lambda h, g \rangle = \langle f, g \rangle + \bar{\lambda} \langle h, g \rangle$. Autrement dit, pour tout $f \in C^0_{2\pi}$ l'application $g \mapsto \langle f, g \rangle$ est une application linéaire tandis que pour tout $g \in C^0_{2\pi}$ l'application $f \mapsto \langle f, g \rangle$ est une application anti-linéaire (à cause du complexe conjugué sur le scalaire λ). On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme sesquilinéaire.
2. Pour tous $f, g \in C^0_{2\pi}$ on a $\langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle}$. On parle de symétrie hermitienne.
3. Pour tout $f \in C^0_{2\pi}$ on a $\langle f, f \rangle \geq 0$. La forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est dite positive.
4. Pour tout $f \in C^0_{2\pi}$ on a $\langle f, f \rangle = 0$ si et seulement si $f = 0$. En effet, $\langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x$ et comme la fonction $|f|^2$ est positive et continue, si son intégrale est nulle c'est que la fonction est nulle sur $[0, 2\pi]$. Comme elle est périodique elle est nulle sur tout $\mathbb{R}$. On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie.

Les quatre propriétés ci-dessus ressemblent à celles qui apparaissent dans la définition d'un *produit scalaire* que vous avez vu en L2. C'est en fait son adaptation au cas des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. Si E est un $\mathbb{C}$-ev, une forme sesquilinéaire symétrique définie positive $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$, i.e. vérifiant les propriétés 1. à 4. ci-dessus, est encore appelée produit scalaire, ou parfois produit hermitien. On peut alors vérifier que l'application $f \mapsto \sqrt{\langle f, f \rangle}$ définit une norme sur E.

Remarque 1.7. *1) Dans certains livres on prend parfois comme convention que le produit scalaire doit être linéaire dans la première variable et antilinéaire dans la seconde, i.e. $\langle f, g + \lambda h \rangle = \langle f, g \rangle + \bar{\lambda} \langle f, h \rangle$ et $\langle f + \lambda h, g \rangle = \langle f, g \rangle + \lambda \langle h, g \rangle$.*

2) Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ est $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$. Son analogue sur $\mathbb{C}^n$ serait $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n \overline{x_j} y_j$. La présence de la conjugaison complexe sert à garantir que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ on a $\langle x, x \rangle \geq 0$. La définition (1.3) en est l'analogue pour les fonctions périodiques.

3) Le facteur $\frac{1}{2\pi}$ devant l'intégrale n'a pas d'importance fondamentale. On verra par la suite qu'il a l'avantage de simplifier les différentes formules.

4) A priori la définition (1.3) a un sens même pour les fonctions uniquement continues par morceaux. On vérifie facilement que les propriétés 1. à 3. restent vraies. La proriété 4. par *contre ne l'est plus. Si $f \in C^0_{2\pi,m}$ vérifie $\langle f, f\rangle = 0$ alors on peut seulement dire que f est nulle sauf éventuellement en un nombre fini de points (là où elle n'est pas continue).*

Définition 1.6. *Soit E un $\mathbb{C}$-ev muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Une famille $(e_j)_{j\in J}$ est dite orthogonale si pour tous $j \neq j'$ on a $\langle e_j, e_{j'}\rangle = 0$. Elle est dite orthonormée si de plus $\langle e_j, e_j\rangle = 1$ pour tout $j \in J$.*

Lemme 1.1. *Si $(e_j)_{j\in J}$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls (en particulier si c'est une famille orthonormée) alors c'est une famille libre.*

Démonstration. Soient $e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda_1 e_{j_1} + \cdots + \lambda_n e_{j_n} = 0$. Montrons que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ on a donc (par linéarité de l'application $f \mapsto \langle e_{j_k}, f\rangle$)

$$0 = \langle e_{j_k}, 0\rangle = \langle e_{j_k}, \lambda_1 e_{j_1} + \cdots + \lambda_n e_{j_n}\rangle = \lambda_1\langle e_{j_k}, e_{j_1}\rangle + \cdots + \lambda_n\langle e_{j_k}, e_{j_1}\rangle = \lambda_k\langle e_{j_k}, e_{j_k}\rangle.$$

Comme e_{j_k} n'est pas le vecteur nul on a $\langle e_{j_k}, e_{j_k}\rangle \neq 0$ et donc $\lambda_k = 0$. Comme c'est vrai pour tout k ça assure que la famille est bien libre. □

Une famille orthogonale (de vecteurs non nuls) est donc forcément libre. Si en plus elle est génératrice c'est donc une base. Le gros intérêt des bases orthonormées, ou orthogonales, est qu'il est très facile de trouver les coefficients d'un vecteur donné dans cette base. En effet, si $f = \lambda_1 e_{j_1} + \cdots + \lambda_n e_{j_n}$ le même calcul que ci-dessus montre que pour tout k on a

$$\langle e_{j_k}, f\rangle = \lambda_k\langle e_{j_k}, e_{j_k}\rangle \quad \Longleftrightarrow \lambda_k = \frac{\langle e_{j_k}, f\rangle}{\langle e_{j_k}, e_{j_k}\rangle}. \tag{1.4}$$

En particulier si la famille est orthonormée on a simplement $\lambda_k = \langle e_{j_k}, f\rangle$.

L'autre relation importante et qu'on retrouvera par la suite, voir les équations (1.7), (1.12) et le Théorème 1.6, est celle qui permet de calculer la norme $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ d'un vecteur à partir de ses coefficients :

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k e_{j_k}, \sum_{\ell=1}^n \lambda_\ell e_{j_\ell} \right\rangle = \sum_{k,\ell=1}^n \bar{\lambda}_k \lambda_\ell \langle e_{j_k}, e_{j_\ell}\rangle = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 \langle e_{j_k}, e_{j_k}\rangle. \tag{1.5}$$

En particulier si la famille est orthonormée on a simplement $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2$.

1.2.2 Polynômes trigonométriques

Notation. Si $n \in \mathbb{Z}$ on notera e_n la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par $e_n(x) = \mathrm{e}^{inx}$.

Définition 1.7. *On appelle polynôme trigonométrique toute fonction de la forme $P = \sum_{n=-M}^{N} c_n e_n$ où $M, N \in \mathbb{N}$ et $c_n \in \mathbb{C}$ pour $n \in \{-M, \ldots, N\}$, i.e. $P(x) = \sum_{n=-M}^{N} c_n \mathrm{e}^{inx}$. On notera $\mathcal{T}$ l'ensemble des polynômes trigonométriques.*

Si P n'est pas nul, i.e. $\exists n \in \{-M, \ldots, N\}$ tel que $c_n \neq 0$, le nombre $\max(M, N)$ est appelé degré de P.

Remarque 1.8. *Quitte à rajouter des coefficients nuls on peut toujours supposer que $M = N$, ce qu'on fera par la suite. On notera $\mathcal{T}_N$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré au plus N, i.e. l'ensemble des fonctions de la forme $P = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n$ où $c_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \{-N, \dots, N\}$.*

Proposition 1.3. *L'ensemble $\mathcal{T}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (c'est un sev de $C^1_{2\pi}$) et pour tout $N \in \mathbb{N}$ l'ensemble $\mathcal{T}_N$ en est un sev de dimension $2N+1$. Tout élément de $\mathcal{T}$ est une fonction C^∞ et 2π-périodique.*

Démonstration. La proposition ci-dessus est un simple exercice, mis à part pour la dimension de $\mathcal{T}_N$ où seule l'inégalité $\dim \mathcal{T}_N \leq 2N+1$ est immédiate. Faites-le.

Pour montrer que $\dim \mathcal{T}_N = 2N+1$ il suffit de montrer que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est libre. Ce sera donc une base de $\mathcal{T}$ et la famille $(e_{-N}, \dots, e_0, \dots, e_N)$ sera une base de $\mathcal{T}_N$. L'observation clé est que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale pour le produit scalaire défini en (1.3). En effet si $n \neq m$ on a

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-inx} \mathrm{e}^{imx} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(m-n)x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\mathrm{e}^{i(m-n)x}}{i(m-n)} \right]_0^{2\pi} = 0,$$

tandis que

$$\langle e_n, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-inx} \mathrm{e}^{imx} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}x = 1.$$

□

Remarque 1.9. *1) Le choix du préfacteur $\frac{1}{2\pi}$ est fait pour que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit orthonormée. Elle serait simplement orthogonale sinon.*

2) Si $P(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{inx} \in \mathcal{T}_N$, en utilisant (1.4) on voit que les coefficients c_n s'obtiennent par la formule

$$c_n = \langle e_n, P \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-inx} P(x) \,\mathrm{d}x. \tag{1.6}$$

De plus, en utilisant (1.5) on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2. \tag{1.7}$$

Plutôt que d'utiliser les fonctions $e_n(x) = \mathrm{e}^{inx}$ on peut aussi utiliser les fonctions $f_n(x) = \cos(nx)$ et $g_n(x) = \sin(nx)$. Les fonctions f_n et g_n étant respectivement paires et impaires il suffit dans ce cas de se restreindre à $n \in \mathbb{N}$, et même $n \in \mathbb{N}^*$ pour les fonctions g_n puisque

g_0 est nulle. Puisque $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, si $P \in \mathcal{T}_N$ on pourra écrire

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{n=-N}^{N} c_n(\cos(nx) + i\sin(nx)) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{N} (c_n + c_{-n})\cos(nx) + i(c_n - c_{-n})\sin(nx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx), \end{aligned}$$

où pour tout n on a posé $a_n = c_n + c_{-n}$ (en particulier $a_0 = 2c_0$) et $b_n = i(c_n - c_{-n})$. Autrement dit P est combinaison linéaire des fonctions f_n et g_n avec $n \leq N$ (le terme $\frac{a_0}{2}$ n'est rien d'autre que $\frac{a_0}{2} f_0$). Réciproquement, en écrivant

$$\cos(nx) = \frac{\mathrm{e}^{inx} + \mathrm{e}^{-inx}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(nx) = \frac{\mathrm{e}^{inx} - \mathrm{e}^{-inx}}{2i},$$

si P est une fonction de la forme $P = \frac{a_0}{2} f_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n f_n + b_n g_n$, i.e. $P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$, alors

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right)\mathrm{e}^{inx} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right)\mathrm{e}^{-inx}.$$

Si on pose, pour $n \geq 0$, $c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = \frac{a_n - ib_n}{2}$ et $c_{-n} = \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ avec la convention $b_0 = 0$, on a alors $P = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n \in \mathcal{T}_N$. On résume cela dans la proposition suivante.

Proposition 1.4. *Pour tout $N \in \mathbb{N}$ l'espace $\mathcal{T}_N$ est l'espace vectoriel engendré par les fonctions $f_0, \ldots, f_N, g_1, \ldots, g_N$.*

Remarque 1.10. *La convention de prendre $a_0 = 2c_0$ et pas simplement $a_0 = c_0$ permet ici et ailleurs de ne pas avoir à distinguer le cas $n = 0$, voir la Remarque 1.11 ci-dessous.*

Dans la pratique il souvent plus simple d'utiliser les fonctions exponentielles plutôt que les fonctions f_n et g_n. Cela provient du fait que la famille $((f_n)_{n\geq 0}, (g_n)_{n\geq 1})$ est orthognale mais pas orthonormée. En écrivant que $f_n = \frac{1}{2}(e_n + e_{-n})$ et $g_n = \frac{1}{2i}(e_n - e_{-n})$ on vérifie en effet facilement que, pour tous n et m,

$$\langle f_n, g_m \rangle = 0, \quad \langle f_n, f_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ 1, & \text{si } n = m = 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{sinon,} \end{cases} \quad \langle g_n, g_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } n = m. \end{cases} \tag{1.8}$$

En particulier si $P = \frac{a_0}{2} f_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n f_n + b_n g_n$, i.e. $P(x) = \frac{a_0}{2} f_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$ alors (1.4) donne, pour $n = 0, \ldots, N$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x, \tag{1.9}$$

et (1.5) donne

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|P(x)|^2\,\mathrm{d}x=\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}|a_n|^2+|b_n|^2. \tag{1.10}$$

Remarque 1.11. *1) Si on avait écrit P sous la forme $P=a_0f_0+\sum_{n=1}^{N}a_nf_n+b_ng_n$ on aurait alors $a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(x)\,\mathrm{d}x$. La convention de prendre $\frac{a_0}{2}$ permet ici d'avoir une formule commune pour a_0 et les autres a_n.*
2) Notez bien le préfacteur $\frac{1}{\pi}$ au lieu de $\frac{1}{2\pi}$ devant les intégrales dans toutes les formules en $\sin/\cos$.

Il y a cependant des situations où l'utilisation de la famille $(\cos(nx),\sin(nx))_n$ est préférable. D'une part si P est une fonction à valeurs réelles, il est plus naturel d'utiliser les f_n et g_n qui sont aussi à valeurs réelles. Mais on verra que c'est surtout pratique lorsque la fonction considérée est paire ou impaire. Cela vient simplement du fait que les fonctions f_n sont toutes paires et les fonctions g_n toutes impaires. En effet, si P est paire alors pour tout $n\geq 1$ on a aura

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x=0,$$

où on a utilisé la Proposition 1.2 avec $a=-\pi$ et le fait que la fonction $P(x)\sin(nx)$ est impaire. De même, si P est impaire on a pour tout $n\geq 0$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=0.$$

1.2.3 Séries trigonométriques

Pour aller au delà des polynômes trigonométriques l'idée est ensuite de faire des "sommes infinies". On ne peut en effet pas espérer écrire n'importe quelle fonction périodique, disons continue, comme combinaison linéaire finie des fonctions $x\mapsto \mathrm{e}^{inx}$. Cela voudrait dire que n'importe quelle fonction continue périodique est un polynôme trigonométrique et donc en particulier C^∞ ce qui n'est bien entendu pas le cas.

Définition 1.8. *On appelle série trigonométrique toute série de fonctions de la forme $c_0+\sum_{n\geq1}\left(c_n\mathrm{e}^{inx}+c_{-n}\mathrm{e}^{-inx}\right)$. Lorsqu'elle converge on notera $S(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\mathrm{e}^{inx}$ la somme de la série.*

De façon équivalente une série trigonométrique est série de fonctions de la forme $\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq1}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$.

Remarque 1.12. *1) Contrairement à ce que vous avez vu pour les intégrales généralisées du type $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ pour lesquelles on demande la convergence des deux intégrales $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{-\infty}^{0}f(x)\,\mathrm{d}x$ séparément, et contrairement à ce qui est fait habituellement pour les séries*

indexées sur $\mathbb{Z}$, la convergence considérée ici est celle de la suite des sommes partielles "symétriques" $S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$.
2) Les sommes partielles d'une série trigonométrique sont des polynômes trigonométriques.

La première propriété sur les séries trigonométriques est immédiate

Proposition 1.5. *Soit $c_0 + \sum_{n\geq 1} \left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\right)$ une série trigonométrique. Si la série converge simplement sur $\mathbb{R}$ alors sa somme $S(x)$ est une fonction 2π-périodique.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que les sommes partielles $S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ sont toutes des fonctions 2π-périodiques, i.e. pour tout $N \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $S_N(x+2\pi) = S_N(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ en faisant tendre N vers l'infini on obtient bien (convergence simple) $S(x+2\pi) = S(x)$. $\square$

Le résultat suivant, qui demande une convergence un peu plus forte, montre comment les résultats sur les polynômes trigonométriques peuvent s'étendre à un cas de "combinaison linéaire infinie".

Théorème 1.1. *Soit $c_0 + \sum_{n\geq 1} \left(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\right)$ une série trigonométrique. On suppose que la série $\sum_{n\geq 1} |c_n| + |c_{-n}|$ converge, ce qui est équivalent à dire que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$ converge. Alors*

1. *La série trigonométrique converge normalement sur $\mathbb{R}$. En particulier sa somme S est une fonction continue.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a*
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} S(x)\, dx. \tag{1.11}$$
3. *La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$ converge et on a*
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S(x)|^2\, dx. \tag{1.12}$$

Démonstration. 1) Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\left|c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\right| \leq \left|c_n e^{inx}\right| + \left|c_{-n} e^{-inx}\right| = |c_n| + |c_{-n}|$. Par hypothèse la série $\sum_{n\geq 1} |c_n| + |c_{-n}|$ converge ce qui prouve la convergence normale de la série trigonométrique. Comme toutes les fonctions $x \mapsto c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$ sont continues, la convergence normale garantit que la somme $S(x)$ définit aussi une fonction continue.
2) Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a $e^{-inx} S(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{i(m-n)x}$ et le même argument que ci-dessus montre que cette série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $[0, 2\pi]$. On

peut donc intégrer la série terme à terme ce qui donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-inx} S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{c_m}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(m-n)x}\,\mathrm{d}x = c_n.$$

3) Enfin on s'intéresse à la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$. On pourrait commencer par étudier séparément la convergence de la série et ensuite calculer sa somme. On va faire les deux simultanément. Soit $N \geq 1$. En utilisant l'identité $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - \overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}$ on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|S(x) - S_N(x)|^2 = |S(x)|^2 + |S_N(x)|^2 - \sum_{n=-N}^{N} c_n\overline{S(x)}\mathrm{e}^{inx} - \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n}S(x)\mathrm{e}^{-inx}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S(x) - S_N(x)|^2\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S(x)|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S_N(x)|^2\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \sum_{n=-N}^{N}\frac{c_n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{S(x)}\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x - \sum_{n=-N}^{N}\frac{\overline{c_n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S(x)|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S_N(x)|^2\,\mathrm{d}x - 2\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2,\end{aligned}$$

où on a utilisé (1.11) à la dernière ligne. Par ailleurs $S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n\mathrm{e}^{inx}$ est un polynôme trigonométrique, donc d'après (1.7) on a $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S_N(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$. Finalement,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S(x) - S_N(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S(x)|^2\,\mathrm{d}x - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2.$$

Il reste donc à montrer que $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S(x) - S_N(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0$. Si on note $\|S - S_N\|_\infty = \displaystyle\sup_{x\in[0,2\pi]} |S(x) - S_N(x)|$ (la fonction $S - S_N$ est continue donc bornée sur le segment $[0, 2\pi]$)) on a

$$0 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S(x) - S_N(x)|^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|S - S_N\|_\infty^2\,\mathrm{d}x = \|S - S_N\|_\infty^2.$$

Finalement, puisque la série trigonométrique converge normalement elle converge uniformément, i.e. $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \|S - S_N\|_\infty = 0$, et donc $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S(x) - S_N(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0$ d'après le théorème des gendarmes. □

On a bien entendu un résultat similaire pour les séries trigonométriques mises sous la forme $\displaystyle\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$.

Théorème 1.2. *Soit* $\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ *une série trigonométrique. On suppose que la série* $\sum_{n\geq 1}|a_n|+|b_n|$ *converge. Alors*

1. *La série trigonométrique converge normalement sur* $\mathbb{R}$*. En particulier sa somme* S *est une fonction continue.*
2. *Pour tout* $n\geq 0$ *on a*

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x. \tag{1.13}$$

3. *La série* $\sum_{n\geq 1}|a_n|^2+|b_n|^2$ *converge et on a*

$$\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2+|b_n|^2=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|S(x)|^2\,\mathrm{d}x. \tag{1.14}$$

Exercice 1.4. *Démontrer le théorème ci-dessus.*

Remarque 1.13. *On sait que si une série* $\sum u_n$ *converge on a nécessairement* $\lim u_n=0$*. Si une série trigonométrique* $\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$*, resp.* $\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\mathrm{e}^{inx}$*, converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *on a donc* $\lim_{n\to\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)=0$*, resp.* $\lim_{n\to+\infty}c_n\mathrm{e}^{inx}+c_{-n}\mathrm{e}^{-inx}=0$*, pour tout* $x\in\mathbb{R}$*. On peut alors montrer qu'on a forcément* $\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}b_n=\lim_{n\to\pm\infty}c_n=0$*.*

1.3 Série de Fourier d'une fonction périodique.

1.3.1 Coefficients de Fourier

Dans l'idée de décomposer une fonction périodique comme combinaison linéaire des fonctions $x\mapsto \mathrm{e}^{inx}$, ou bien $x\mapsto\cos(nx)$ et $x\mapsto\sin(nx)$, la définition ci-dessous découle de ce qu'on a fait dans la section précédente pour les polynômes et les séries trigonométriques.

Définition 1.9. *Soit* $f\in C^0_{2\pi,m}$*. On définit ses coefficients de Fourier (de type exponentiels) pour tout* $n\in\mathbb{Z}$ *par*

$$c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x.$$

De même on définit ses coefficients de Fourier (de type $\sin/\cos$*) pour tout* $n\geq 0$ *par*

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 1.14. *1) De façon plus compacte on peut écrire que* $c_n(f)=\langle e_n,f\rangle$ *où* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *est le produit scalaire défini en (1.3). En particulier les applications* $f\mapsto c_n(f)$ *sont des applications linéaires.*

2) On vérifie facilement que pour tout $n\in\mathbb{N}$ *on a* $a_n(f)=c_n(f)+c_{-n}(f)$ *et* $b_n(f)=i(c_n(f)-c_{-n}(f))$*, ou de façon équivalent* $c_n(f)=\frac{a_n(f)-ib_n(f)}{2}$ *et* $c_{-n}(f)=\frac{a_n(f)+ib_n(f)}{2}$*.*

Définition 1.10. *Soit $f \in C^0_{2\pi,m}$. La série de Fourier de f est la série trigonométrique*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\mathrm{e}^{inx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx).$$

On notera $S_N(f)(x)$ ses sommes partielles, et lorsqu'elle converge $S(f)(x)$ sa somme.

Remarque 1.15. *1) Si $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{inx}$ est la somme d'une série trigonométrique telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$ converge alors le Théorème 1.1 assure que $f \in C^0_{2\pi,m}$ (elle est même continue) et que pour tout n on a $c_n(f) = c_n$. Autrement dit f coincide avec sa série de Fourier.*
2) Pour tout $N \in \mathbb{N}$ l'application $C^0_{2\pi,m} \ni f \mapsto S_N(f) \in \mathcal{T}_N$ est une application linéaire.

Proposition 1.6. *Soit $f \in C^0_{2\pi,m}$.*
1) Si f est paire alors $b_n(f) = 0$ pour tout n et on a

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x, \tag{1.15}$$

et si f est impaire alors $a_n(f) = 0$ pour tout n et on a

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x, \tag{1.16}$$

2) Si f est à valeurs réelles alors $a_n(f), b_n(f) \in \mathbb{R}$ et $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

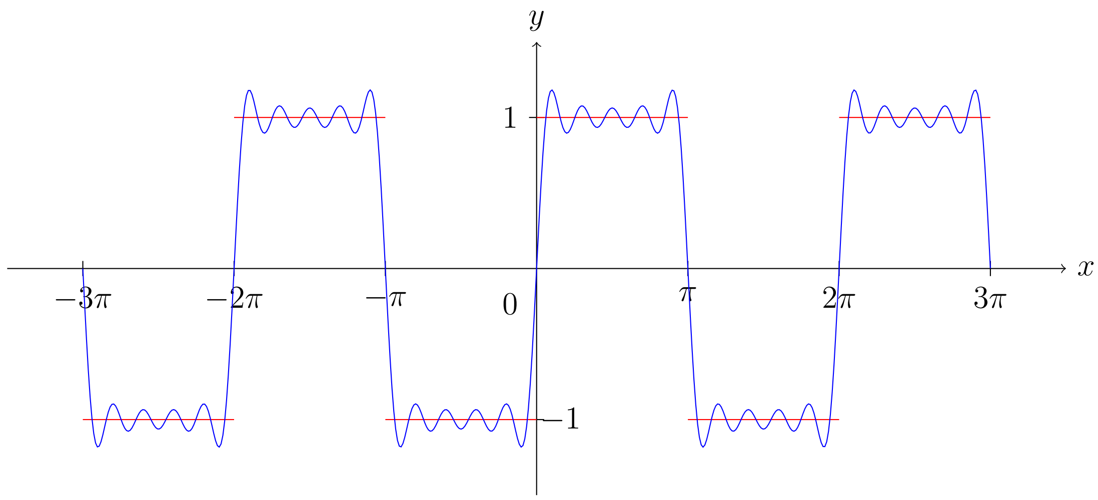
Exercice 1.5. *Démontrez la proposition.*

Remarque 1.16. *Sans hypothèse particulière on a $\overline{a_n(f)} = a_n(\bar{f})$, $\overline{b_n(f)} = b_n(\bar{f})$ et $\overline{c_n(f)} = c_{-n}(\bar{f})$.*

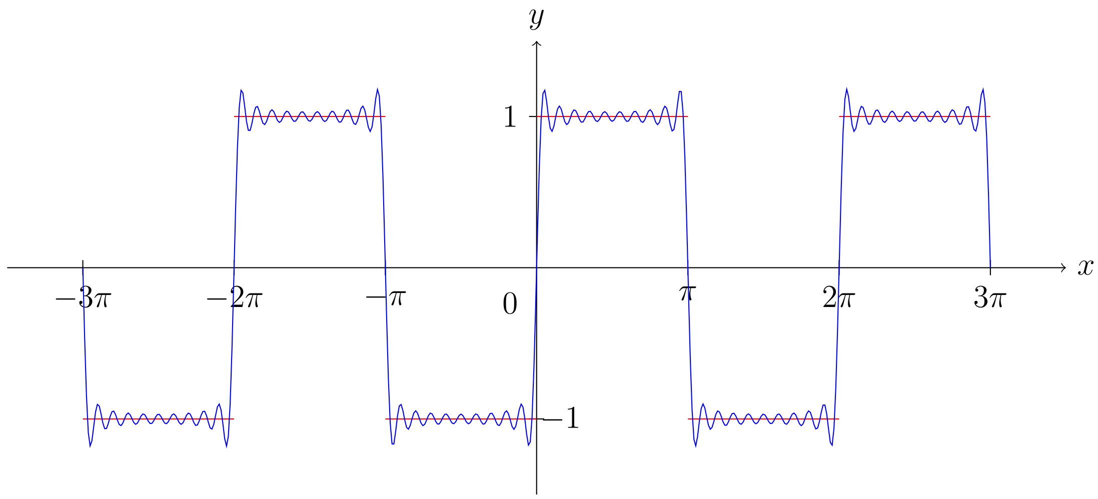
Exemple 1.2. *Soit f la fonction 2π-périodique définie dans l'Exemple 1.1. Comme f est réelle et impaire on va plutôt utiliser les coefficients en $\sin/\cos$. On sait déà que $a_n(f) = 0$ pour tout n. Il reste à calculer les coefficients $b_n(f)$. Soit $n \geq 1$, on calcule facilement*

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \overset{\text{parité}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ \frac{4}{(2k+1)\pi} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

La série de Fourier de f est donc la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi}\sin((2k+1)x)$. On peut déjà remarquer qu'on n'est pas ici dans le cadre du Théorème 1.2 puisque la série $\sum_{n\geq 1} |b_n(f)| = \sum_{k\geq 0} \frac{4}{(2k+1)\pi}$ diverge. On peut néanmoins démontrer que cette série converge simplement sur $\mathbb{R}$ (voir TD). On verra également que l'égalité (1.14) est vraie, c'est le Théorème de Parseval, et que $S(f) = f$, c'est le Théorème de Dirichlet.



Graphes de f et $S_{10}(f)$.



Graphes de f et $S_{20}(f)$.

Supposons maintenant que la fonction f n'est pas seulement continue par morceaux mais est C^1 par morceaux, et soit $\{x_0, \ldots, x_n\}$ une subdivision adaptée sur $[0, 2\pi]$. Comme on l'a dit dans la Remarque 1.6 la fonction f' est définie est continue sauf aux points $x_k + 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, et quelles que soient les valeurs que l'on donne à f' en $x_0, \ldots, x_n$ la fonction f' sera continue par morceaux et toute intégrale faisant apparaitre la fonction f' ne dépendra pas de la valeur donnée en ces points. En particulier les coefficients de Fourier de la fonction f' n'en dépenderont pas. La proposition suivante relie les coefficients de Fourier de f' à ceux de f.

Proposition 1.7. *Soit f une fonction <u>continue</u> et C^1 par morceaux. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $c_n(f') = inc_n(f)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n(f') = nb_n(f)$ et $b_n(f') = -na_n(f)$.*

Démonstration. On fait la preuve pour les coefficients c_n, elle est similaire pour les a_n et b_n. L'idée de la preuve est très simple : ce n'est rien d'autre qu'une intégration par partie.

Le fait que f' ne soit pas continue complique cependant un tout petit peu la preuve. Pour comprendre on commence par supposer que f est de classe C^1. Soit $n \in \mathbb{Z}$, on a alors

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[f(x)\mathrm{e}^{-inx}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\times -in\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x = inc_n(f),$$

où on a utilisé la périodicité de f pour justifier que $[f(x)\mathrm{e}^{-inx}]_0^{2\pi} = 0$.

Supposons maintenant f n'est plus C^1 mais seulement C^1 par morceaux et continue. On ne peut alors plus aussi facilement faire l'IPP. Soit $\{x_0, \dots, x_m\}$ une subdivision adaptée. L'idée est simplement de découper l'intégrale à l'aide de la relation de Chasles :

$$2\pi c_n(f') = \int_0^{2\pi} f'(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f'(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{m}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x$$

où on a posé $x_{m+1} = x_0 + 2\pi$.

Par définition sur chacun des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$ la fonction f coincide avec une fonction f_k qui est C^1 sur $[x_k, x_{k+1}]$, voir la Remarque 1.4, et en particulier $f' = f_k'$ sur chacun de ces intervalles. On peut donc écrire, en remplaçant d'abord f' par f_k' puis en revenant de f_k à f.

$$\begin{aligned}
2\pi c_n(f') &= \sum_{k=0}^{m}\left(\left[f_k(x)\mathrm{e}^{-inx}\right]_{x_k}^{x_{k+1}} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(x)\times -in\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \sum_{k=0}^{m} f_k(x_{k+1})\mathrm{e}^{-inx_{k+1}} - \sum_{k=0}^{m} f_k(x_k)\mathrm{e}^{-inx_k} + in\sum_{k=0}^{m}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{k=1}^{m+1} f_{k-1}(x_k)\mathrm{e}^{-inx_k} - \sum_{k=0}^{m} f_k(x_k)\mathrm{e}^{-inx_k} + in\sum_{k=0}^{m}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{k=1}^{m}(f_{k-1}(x_k) - f_k(x_k))\mathrm{e}^{-inx_k} + (f_m(x_0+2\pi) - f_0(x_0)) + in\int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{k=1}^{m}(f_{k-1}(x_k) - f_k(x_k))\mathrm{e}^{-inx_k} + (f_m(x_0+2\pi) - f_0(x_0)) + inc_n(f).
\end{aligned}$$

Enfin, comme la fonction f est continue on a, pour tout k,

$$f_{k-1}(x_k) = \lim_{x\to x_k^-} f_{k-1}(x) = \lim_{x\to x_k^-} f(x) = f(x_k) = \lim_{x\to x_k^+} f(x) = \lim_{x\to x_k^+} f_k(x) = f_k(x_k)$$

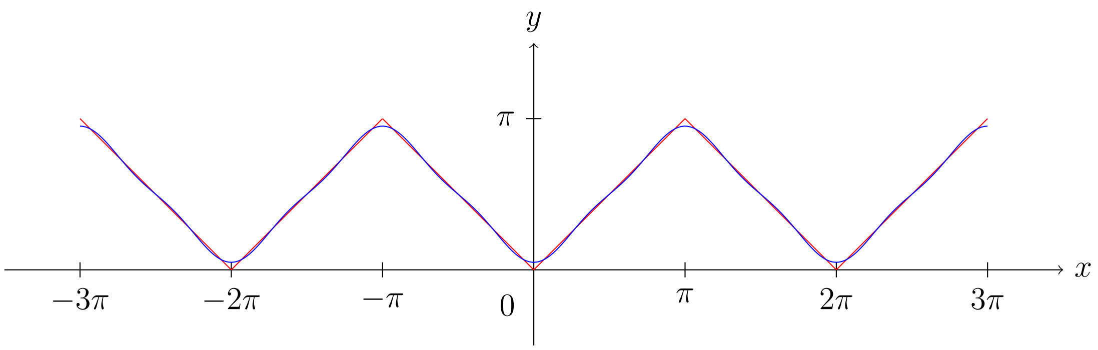
et de même $f_m(x_0 + 2\pi) = f(x_0 + 2\pi) = f(x_0) = f_0(x_0)$. Tous les termes du membre de droite sont donc nuls sauf le dernier et on a bien $c_n(f') = inc_n(f)$. □

Remarque 1.17. *Si on ne suppose pas la fonction f continue alors le résultat est faux. Dans la preuve les termes de bords venant des intégrations par parties ne se compensent a priori pas. Si on reprend la fonction f de l'Exemple 1.2, elle est bien C^1 par morceaux, mais elle n'est pas continue. Pour tout $x \neq m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, elle est dérivable et $f'(x) = 0$. Ainsi tous les coefficients de Fourier de f' sont nuls. En particulier les $a_n(f')$ sont nuls et la relation $a_n(f') = nb_n(f)$ n'est pas satisfaite.*

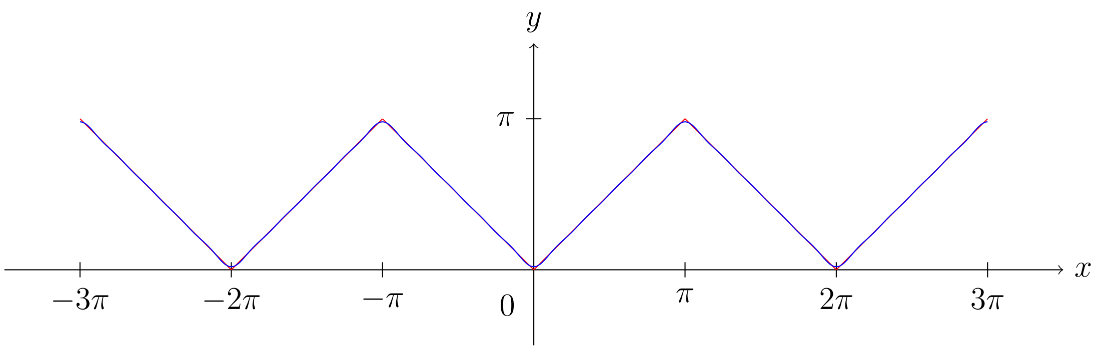
Exemple 1.3. *Soit g la fonction 2π-périodique définie par $g(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$. La fonction g est continue et C^1 par morceaux. Sa dérivée g', là où g est dérivable, est la fonction f de l'Exemple 1.2. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n(f) = nb_n(g)$ et $b_n(f) = -na_n(g)$. On obtient donc $b_n(g) = 0$ pour tout n (ce n'est pas étonnant puisque g est paire), $a_{2k+1}(g) = -\frac{b_{2k+1}(f)}{2k+1} = \frac{-4}{(2k+1)^2\pi}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $a_{2k}(g) = 0$ si $k \geq 1$. Il reste à calculer $a_0(g)$. On a*

$$a_0(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{parité}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \pi.$$

En conclusion la série de Fourier de la fonction g est la série $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$. On peut remarquer qu'ici la série $\sum_{n\geq 0}|a_n| = \frac{\pi}{2} + \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2}$ converge. On est donc dans le cadre du Théorème 1.2 qui garantit que la série de Fourier de g converge normalement vers une fonction continue $S(g)$ dont les coefficients de Fourier sont ceux de g, i.e. $S(S(g)) = S(g)$.



Graphes de g et $S_4(g)$.



Graphes de g et $S_{10}(g)$.

La question importante à laquelle on va s'intéresser par la suite est : à quelle condition générale la série de Fourier d'une fonction f converge-t-elle ? En quel sens cette convergence a-t-elle lieu ? Dans ce cas quel est le lien entre $S(f)$ et f ?

1.3.2 Meilleure approximation en moyenne quadratique : l'inégalité de Bessel

Même si on ne sait pas encore si la série de Fourier d'une fonction $f \in C^0_{2\pi,m}$ converge ni éventuellement vers quoi, les sommes partielles de la série de Fourier sont étroitement reliées à la fonction f.

Proposition 1.8. *Soit $f \in C^0_{2\pi,m}$. Alors pour tout entier N la somme partielle $S_N(f)$ de la série de Fourier de f est l'unique polynôme trigonométrique de degré au plus N qui réalise la meilleure approximation en moyenne quadratique de f sur $\mathcal{T}_N$. C'est-à-dire que pour tout $P \in \mathcal{T}_N$ on a*

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - S_N(f)(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq \int_0^{2\pi} |f(x) - P(x)|^2 \, \mathrm{d}x \iff \|f - S_N\|^2 \leq \|f - P\|^2 \quad (1.17)$$

avec égalité si et seulement si $P = S_N(f)$. De plus les séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ et $\sum_{n\geq 1} |a_n|^2 + |b_n|^2$ convergent et on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \|f\|^2.$$

et

$$\frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n\geq 1} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Ces inégalités s'appellent les inégalités de Bessel.

Démonstration. On traite le cas de la série mise sous forme exponentielle. On rappelle que si $f, g \in C^0_{2\pi,m}$ alors $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) \, \mathrm{d}x$ est un produit scalaire et que la famille de fonctions $(e_n)_{n=-N,\dots,N}$ est une base orthonormée de $\mathcal{T}_N$.

Soit $P \in \mathcal{T}_N$. Il existe donc $\lambda_{-N}, \dots, \lambda_N$ tels que $P = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \lambda_n e_n$. On a alors

$$\begin{aligned} \|f - P\|^2 &= \langle f - P, f - P\rangle \\ &= \langle (f - S_N) + (S_N - P), (f - S_N) + (S_N - P)\rangle \\ &= \|f - S_N\|^2 + \|S_N - P\|^2 + \langle f - S_N, S_N - P\rangle + \langle S_N - P, f - S_N\rangle. \end{aligned}$$

Les deux derniers termes sont complexes conjugués l'un de l'autre. On regarde donc juste l'un d'entre eux, par exemple le dernier. On a alors

$$\begin{aligned} \langle S_N - P, f - S_N\rangle &= \left\langle \sum_{n=-N}^{N} (c_n(f) - \lambda_n) e_n, f - \sum_{m=-N}^{N} c_m(f) e_m \right\rangle \\ &= \sum_{n=-N}^{N} (\overline{c_n(f)} - \overline{\lambda_n}) \langle e_n, f\rangle - \sum_{n,m=-N}^{N} (\overline{c_n(f)} - \overline{\lambda_n}) c_m(f) \langle e_n, e_m\rangle \\ &= \sum_{n=-N}^{N} (\overline{c_n(f)} - \overline{\lambda_n}) c_n(f) - \sum_{n=-N}^{N} (\overline{c_n(f)} - \overline{\lambda_n}) c_n(f) \\ &= 0. \end{aligned}$$

A l'avant dernière ligne on a utilisé $\langle e_n, f\rangle = c_n(f)$ et le fait que $(e_n)_n$ est une famille orthonormée.

Finalement on a donc $\|f-P\|^2 = \|f-S_N\|^2 + \|S_N - P\|^2 \geq \|f-S_N\|^2$ avec égalité si et seulement si $\|S_N - P\| = 0$, i.e. $S_N = P$ puisque les fonctions S_N et P sont continues.

On montre ensuite l'inégalité de Bessel. Soit $N \in \mathbb{N}$. En appliquant ce qu'on a fait ci-dessus avec $P = 0$ on obtient

$$\|f\|^2 = \|f-S_N\|^2 + \|S_N\|^2 \geq \|S_N\|^2. \tag{1.18}$$

Comme $S_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n$ et que $(e_n)_n$ est orthonormée on obtient, voir (1.7), $\|S_N\|^2 = \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2$. Pour tout N on a donc l'inégalité $\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|^2$. Comme on a une série à termes positifs et qu'elle est majorée, la série converge et on a bien l'inégalité de Bessel en passant à la limite $N \to \infty$. □

Remarque 1.18. *Ce qu'on a fait là n'est pas particulier aux séries de Fourier. Cela repose principalement sur le fait qu'on a un produit scalaire et que $\mathcal{T}_N$ est de dimension finie. C'est un cas particulier de ce qu'on appelle la projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie.*

Pour espérer que la série de Fourier d'une fonction f converge il faut au moins que ses coefficients tendent vers 0, voir la Remarque 1.13. Le résultat suivant assure que c'est bien le cas.

Corollaire 1.1. *[Lemme de Riemann-Lebesgue] Si $f \in C^0_{2\pi,m}$ alors $\lim_{n\to\pm\infty} c_n(f) = \lim_{n\to\infty} a_n(f) = \lim_{n\to\infty} b_n(f) = 0$.*

Démonstration. Cela découle directement de la convergence des séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ et $\sum_{n\geq 1} |a_n|^2 + |b_n|^2$ (le terme général d'une série convergente tend vers 0). □

Exemple 1.4. *On peut montrer que la série trigonométrique $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, voir la Section 1.5.2. Cependant elle ne peut pas être la série de Fourier d'une fonction $f \in C^0_{2\pi,m}$. En effet on aurait sinon $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout n. Cela contredirait alors la convergence de la série $\sum |b_n(f)|^2$.*

Théorème 1.3. *Si f est continue et C^1 par morceaux alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ (vers une fonction continue).*

Remarque 1.19. *On verra par la suite que dans ce cas elle converge vers f.*

Démonstration. D'après le Théorème 1.1 il suffit de montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$ converge. Comme f est continue et C^1 par morceaux, d'après la Proposition 1.7 on a $c_n(f') = inc_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ on a donc

$$|c_n(f)| = \frac{|c_n(f')|}{|n|} \leq \frac{1}{2}\left(|c_n(f')|^2 + \frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann) et la série $\sum |c_n(f')|^2$ converge puisque f' est continue par morceaux. Par comparaison de séries à termes positifs la série $\sum |c_n(f)|$ converge.

1.4 Convergence des séries de Fourier

1.4.1 Le théorème de Dirichlet

Le théorème principal concernant la convergence des séries de Fourier est le théorème de Dirichlet (ou Jordan-Dirichlet).

Théorème 1.4 (Dirichlet). *Soit $f \in C^1_{2\pi,m}$. En particulier pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ les quantités $f(x_0^+) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$ et $f(x_0^-) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x)$ existent et sont finies. Alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ on a*

$$S(f)(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right).$$

Si f est continue en x_0 on a simplement $S(f)(x_0) = f(x_0)$.

Corollaire 1.2. *Si f est continue et C^1 par morceaux alors la série de Fourier de f converge normalement, et donc uniformément, vers f sur $\mathbb{R}$.*

Le Corollaire découle directement du théorème de Dirichlet et du Théorème 1.3.

Remarque 1.20. *Le théorème est optimal dans le sens où on ne peut pas se passer de l'hypothèse C^1 par morceaux. Il existe des fonctions continues dont la série de Fourier diverge en certains points.*

Avant de montrer le théorème de Dirichlet on va en donner une application directe. Il permet de calculer la valeur de certaines séries numériques.

Exemple 1.5. *On prend la fonction f de l'Exemple 1.2. Cette fonction est bien C^1 par morceaux. Le théorème de Dirichlet assure donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$S(f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi}\sin((2k+1)x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Si on prend $x = \frac{\pi}{2}$ la fonction f est continue en $\frac{\pi}{2}$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. On a donc, puisque $\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}) = \sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^k$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi}\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = 1 \iff \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Prenons maintenant la fonction g de l'Exemple 1.2. Elle est cette fois continue et C^1 par morceaux. Sa série de Fourier converge donc normalement vers g. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} = g(x).$$

Si on prend $x = 0$ on obtient alors

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = g(0) = 0 \iff \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

On peut alors utiliser cette série pour calculer (enfin) la somme de la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. On va pour ça la couper en 2 en séparant les termes n pairs et n impairs (vérifiez que toutes les séries utilisées sont bien convergentes et que le calcul est donc légitime). On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{\pi^2}{8},$$

et donc $\displaystyle\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$, i.e. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Le reste de cette section a pour objectif de démontrer le théorème de Dirichlet. On va réécrire les sommes partielles $S_N(f)$ sous une forme un peu différente. Si $N \geq 0$ on peut écrire

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\mathrm{e}^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} \int_0^{2\pi} f(y)\mathrm{e}^{-iny}\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y) \times \left(\sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{in(x-y)}\right)\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Pout tout $N \in \mathbb{N}$ on définit la fonction $D_N(t) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{int}$. On a alors

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)D_N(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Si on fait le changement de variable $t = x - y$ on peut également écrire (toutes les fonctions sont 2π-périodiques).

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{x-2\pi}^{x} f(x-t)D_N(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.19}$$

Les fonctions D_N sont appelées noyaux de Dirichlet et ont l'avantage de pouvoir facilement être calculées. En effet, si $t = 2m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$ on a $\mathrm{e}^{int} = 1$ pour tout n et donc $D_N(2m\pi) =$

$2N+1$. Sinon $e^{it} \neq 1$ et on a affaire à la somme des termes d'une suite géométrique de raison e^{it} et de premier terme e^{-iNt}. On obtient donc

$$\begin{aligned}
D_N(t) &= e^{-iNt}\frac{1-e^{i(2N+1)t}}{1-e^{it}} \\
&= e^{-iNt}\frac{e^{i(N+1/2)t}\left(e^{-i(N+1/2)t}-e^{i(N+1/2)t}\right)}{e^{it/2}\left(e^{-it/2}-e^{it/2}\right)} \\
&= \frac{e^{-i(N+1/2)t}-e^{i(N+1/2)t}}{e^{-it/2}-e^{it/2}} \\
&= \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, en prenant la fonction f constante égale à 1 on a facilement $c_0(f) = 1$ et $c_n(f) = 0$ si $n \neq 0$ donc $S_N(f)(x) = 1$ pour tout x. Ainsi l'identité (1.19) donne $1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout N. Comme de plus la fonction D_N est paire on a également

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_N(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

On résume tout cela dans le lemme suivant.

Lemme 1.2. *Pour tout $N \geq 0$ le noyau de Dirichlet $D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int}$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. *$D_N(t) = 2N+1$ si $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $D_N(t) = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ sinon. En particulier la fonction D_N est paire.*
2. *$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_N(t)\,\mathrm{d}t = 1$.*
3. *Pour toute fonction $f \in C^0_{2\pi,m}$ on a $S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout x.*

Démonstration du Théorème de Dirichlet. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a, en utilisant la parité de D_N,

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-t)D_N(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x+t)D_N(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (1.20)
\end{aligned}$$

Par ailleurs puisque $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_N(t)\,\mathrm{d}t = 1$ on peut écrire

$$\frac{1}{2}\left(f(x^-)+f(x^+)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x^-)+f(x^+)\right)D_N(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a donc, en utilisant $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ avec $a = Nt$ et $b = \frac{t}{2}$,

$$\begin{aligned}
&S_N(f)(x) - \frac{1}{2}\left(f(x^-) + f(x^+)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(f(x+t) + f(x-t) - f(x^+) - f(x^-)\right) D_N(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(f(x+t) + f(x-t) - f(x^+) - f(x^-)\right) \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(f(x+t) + f(x-t) - f(x^+) - f(x^-)\right) \times \left(\frac{\sin(Nt)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} + \cos(Nt)\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(\frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x^-)}{t}\right) \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sin(Nt)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(f(x+t) + f(x-t) - f(x^+) - f(x^-)\right)\cos(Nt)\,\mathrm{d}t. \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

Comme $f \in C^1_{2\pi,m}$ on a $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x^-)}{t} = \lim_{y\to x^+} f'(y) - \lim_{y\to x^-} f'(y)$. On a également $\lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = 2$. La fonction g définie sur $]0,\pi]$ par

$$g(t) = \left(\frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x^-)}{t}\right) \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

et prolongée par imparité et 2π-périodicité est donc continue par morceaux. Par ailleurs la fonction définie par $h(t) = f(x+t) + f(x-t) - f(x^+) - f(x^-)$ est continue par morceaux et paire. En utilisant la parité de g, l'imparité de h et (1.15)-(1.16), l'identité (1.21) s'écrit donc

$$S_N(f)(x) - \frac{1}{2}\left(f(x^-) + f(x^+)\right) = 4b_N(g) + 4a_N(h),$$

et le résultat découle du lemme de Riemann-Lebesgue (Corollaire 1.1).

1.4.2 Approximation uniforme

Théorème 1.5 (Weierstrass)**.** *Soit f une fonction continue 2π-périodique. Il existe une suite $(P_N)_N$ de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers f, i.e. telle que*

$$\|f - P_N\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - P_N(x)| = \sup_{x\in[0,2\pi} |f(x) - P_N(x)| \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration. Si f est continue et C^1 par morceaux le résultat est une conséquence du Corollaire 1.2 de la section précédente. On peut en effet prendre $P_N = S_N(f)$. Comme la série de Fourier converge normalement vers f elle converge uniformément, ce qui veut précisément dire que

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - S_N(f)(x)| = 0.$$

Si f est continue l'idée est d'approcher d'abord f par une fonction g qui est continue et C^1 par morceaux. Soit $N \geq 1$. Comme f est continue sur $[0, 2\pi]$ qui est un ensemble compact la fonction f y est uniformément continue :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in [0, 2\pi],\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon = \frac{1}{N}$, on prend $p \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{2\pi}{p} < \delta$ et pour $k \in \{0, \ldots, , p\}$ on note $x_k = \frac{2k\pi}{p}$. On a en particulier $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \frac{1}{N}$ pour tout k et $f(x_p) = f(x_0)$. Soit f_N la fonction définie sur tout $[x_k, x_{k+1}[$ par

$$f_N(x) = \frac{p}{2\pi} \left(f(x_{k+1}) - f(x_k)\right)(x - x_k) + f(x_k),$$

et prolongée par périodicité. f_N est la fonction affine par morceaux qui coincide avec f aux points x_k. On vérifie facilement que f_N est continue et C^1 par morceaux. De plus, si $x \in [0, 2\pi]$ et k est tel que $x \in [x_k, x_{k+1}]$ on a

$$\begin{aligned} |f_N(x) - f(x)| &\leq \left| \frac{p}{2\pi} \left(f(x_{k+1}) - f(x_k)\right)(x - x_k)\right| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\leq |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| < 2\varepsilon = \frac{2}{N}, \end{aligned}$$

i.e. $|f_N(x) - f(x)| < \frac{2}{N}$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ (les fonctions sont périodiques). Comme f_N est continue et C^1 par morceaux il existe une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers f_N, en particulier il existe un polynôme trigonométrique P_N tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $|f_N(x) - P_N(x)| < \frac{1}{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on aura donc

$$|f(x) - P_N(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - P_N(x)| < \frac{3}{N},$$

et ainsi $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - P_N(x)| < \dfrac{3}{N}$. La suite $(P_N)_N$ converge donc bien uniformément vers f.

Remarque 1.21. *L'hypothèse sur la continuité de f est indispensable. En effet, les polynômes trigonométriques sont des fonctions continues et une limite uniforme de fonctions continues est continue (voir L2). Si f est limite uniforme de polynômes trigonométriques alors nécessairement f est continue. Le théorème de Weierstrass garantit que n'importe quelle fonction continue périodique est limite uniforme de polynômes trigonométriques.*

1.4.3 Convergence en moyenne quadratique. Formule de Parseval

On a vu dans la Section 1.3.2 que si $f \in C^0_{2\pi,m}$ alors pour tout $N \geq 0$ la N-ème somme partielle de la série de Fourier $S_N(f)$ est l'unique élément P de $\mathcal{T}_N$ qui approche le mieux f en moyenne quadratique, i.e. qui minimise la quantité $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x) - P(f)(x)|^2\,\mathrm{d}x = \|f - P\|^2$. On a par ailleurs montré, voir (1.18), que pour tout N on a

$$\|f\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \|S_N(f)\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2, \tag{1.22}$$

d'où on a tiré l'inégalité de Bessel $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|^2$.

La question naturelle est alors : que se passe-t-il si $N \to \infty$? Au vu des théorèmes de Dirichlet et de Weierstrass on peut espérer que $\|f - S_N(f)\| \to 0$, au moins si f est continue ou C^1 par morceaux. On va voir qu'en fait c'est vrai dès que $f \in C^0_{2\pi,m}$.

Théorème 1.6. *Soit $f \in C^0_{2\pi,m}$. Alors $\lim_{N\to\infty} \|f - S_N(f)\|^2 = \lim_{N\to\infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - S_N(f)(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 0$ et on a donc*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x. \qquad \textit{(Formule de Parseval)} \tag{1.23}$$

De même on a

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x. \tag{1.24}$$

Corollaire 1.3. *Si f et g sont continues et ont les même coefficients de Fourier, i.e. $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $f = g$. Plus généralement, si $f, g \in C^0_{2\pi,m}$ ont les même coefficients de Fourier alors $f = g$ sauf éventuellement en leurs points de discontinuité.*

Démonstration. Comme $c_n(f) - c_n(g) = c_n(f - g)$, en appliquant la formule de Parseval à $f - g$ on en déduit que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f) - c_n(g)|^2 = 0,$$

et le résultat en découle immédiatement. $\square$

Tout comme le théorème de Dirichlet la formule de Parseval permet par exemple de calculer la somme de certaines séries numériques.

Exemple 1.6. *On reprend la fonction périodique g qui vaut $g(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$. Ses coefficients de Fourier sont $a_0(g) = \pi$ et $a_{2n+1}(g) = -\dfrac{4}{\pi(2n+1)^2}$. La formule de Parseval donne alors*

$$\frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2n+1)^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3} \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

En raisonnant comme dans l'Exemple 1.5 on peut alors obtenir la valeur de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$. En effet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} + \frac{\pi^4}{96},$$

d'où on tire $\dfrac{15}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4} = \dfrac{\pi^4}{96}$ et donc $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4} = \dfrac{\pi^4}{90}$.

Démonstration du théorème. Une fois montré que $\lim\limits_{N\to\infty}\|f-S_N(f)\|^2=0$ la formule de Parseval découle directement de (1.22) en faisant tendre N vers l'infini. On montre donc que pour tout $f\in C^0_{2\pi,m}$ on a bien $\lim\limits_{N\to\infty}\|f-S_N(f)\|^2=0$. L'idée est de dire qu'il y a “assez de polynômes trigonométriques” pour pouvoir approcher f. On va donc naturellement essayer d'utiliser le théorème de Weierstrass. Il faudra donc passer aussi de la norme infinie (qui apparait dans le théorème de Weierstrass) à la moyenne quadratique $\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x$. Cela se fait facilement. En effet, si $f\in C^0_{2\pi,m}$ on a

$$\|f\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f\|_\infty^2\,\mathrm{d}x=\|f\|_\infty^2,$$

i.e. $\|f\|\le\|f\|_\infty$.

On considère d'abord le cas où f est continue. Soit $\varepsilon>0$. D'après le théorème de Weierstrass il existe $P\in\mathcal{T}$ tel que $\|f-P\|_\infty<\varepsilon$. On a donc $\|f-P\|<\varepsilon$. Si N_0 est le degré de P on a $P\in\mathcal{T}_N$ pour tout $N\ge N_0$ et donc d'après (1.17) pour tout $N\ge N_0$ on a

$$\|f-S_N(f)\|\le\|f-P\|<\varepsilon.$$

On a montré *pour tout* $\varepsilon>0$ *il existe* N_0 *tel que pour tout* $N\ge N_0$ *on a* $\|f-S_N(f)\|<\varepsilon$. C'est précisément la définition de $\lim\limits_{N\to\infty}\|f-S_N(f)\|^2=0$.

On suppose maintenant que f est seulement continue par morceaux. On va procéder de façon analogue à ce qu'on a fait dans la preuve du théorème de Weierstrass en commençant par approcher f par une fonction continue g. On note $\{x_1,\ldots,x_m\}$ les points de discontinuité de f qui sont dans $[0,2\pi]$ avec éventuellement $x_1=0$ et $x_m=2\pi$ si f n'est pas continue en 0, et donc en 2π. Etant donné $\delta>0$ (que l'on fixera par la suite) tel que la distance minimale entre deux points de discontinuité soit inférieure à 2δ, on considère la fonction continue g qui coincide avec f en dehors des intervalles de la forme $]x_k-\delta,x_k+\delta[$ et affine sur ces intervalles, i.e telle que

$$g(x)=\frac{f(x_k+\delta)-f(x_k-\delta)}{2\delta}(x-x_k+\delta)+f(x_k-\delta).$$

La condition sur δ permet juste de s'assurer que ces intervalles sont bien 2 à 2 disjoints. Sur l'intervalle $]x_k-\delta,x_k+\delta[$ on a alors

$$|f(x)-g(x)|\le\left|\frac{f(x_k+\delta)-f(x_k-\delta)}{2\delta}(x-x_k+\delta)\right|+|f(x)-f(x_k-\delta)|\le 4\|f\|_\infty$$

Comme $f=g$ en dehors des intervalles $]x_k-\delta,x_k+\delta[$ on peut donc écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)-g(x)|^2\,\mathrm{d}x &\le \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^m\int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta}|f(x)-g(x)|^2\,\mathrm{d}x\\ &\le \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^m\int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta}16\|f\|_\infty^2\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{16m\delta\|f\|^2}{\pi},\end{aligned}$$

i.e. $\|f-g\|^2 < \dfrac{16\|f\|^2\delta m}{\pi}$.

Par ailleurs, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 2\pi]$ on a

$$|f(x)-S_N(g)(x)|^2 \leq (|f(x)-g(x)|+|g(x)-S_N(g)(x)|)^2 \leq 2|f(x)-g(x)|^2+2|g(x)-S_N(g)|^2.$$

En intégrant entre 0 et 2π on obtient ainsi

$$\|f-S_N(g)\|^2 \leq 2\|f-g\|^2 + 2\|g-S_N(g)\|^2$$

et donc, en utilisant à nouveau (1.17) avec $P = S_N(g)$, pour tout N on a

$$\|f-S_N(f)\|^2 \leq \|f-S_N(g)\|^2 \leq 2\|f-g\|^2 + 2\|g-S_N(g)\|^2.$$

On peut maintenant finir la preuve dans le cas où f est continue par morceaux. Soit $\varepsilon > 0$. On commence par construire, comme ci-dessus, g continue telle que $2\|f-g\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Il suffit pour cela de prendre $\delta < \frac{\varepsilon\pi}{64m\|f\|^2}$. La fonction g étant continue on a $\lim\limits_{N\to\infty} \|g-S_N(g)\| = 0$ donc il existe N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$ on a $2\|g-S_N(g)\|^2 < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Au final, pour tout $N \geq N_0$ on aura

$$\|f-S_N(f)\|^2 \leq 2\|f-g\|^2 + 2\|g-S_N(g)\|^2 < \varepsilon.$$

On a montré : *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_0 tel que si $N \geq N_0$ alors* $\|f-S_N(f)\|^2 < \varepsilon$. C'est précisément la définition de $\lim\limits_{N\to\infty} \|f-S_N(f)\|^2 = 0$. □

Remarque 1.22. *Même si l'application $f \mapsto \|f\|$ n'est pas une norme sur $C^0_{2\pi,m}$ on peut néanmoins démontrer l'inégalité triangulaire $\|f+g\| \leq \|f\|+\|g\|$ pour tous $f, g \in C^0_{2\pi,m}$. On aurait donc directement pu écrire dans la preuve $\|f-S_N(g)\| \leq \|f-g\|+\|g-S_N(g)\|$ et utiliser ensuite cette inégalité pour montrer que $\lim\limits_{N\to\infty} \|f-S_N(f)\| = 0$.*

On termine cette section par une remarque qui "combine" les théorèmes de Dirichlet et de Parseval. Pour simplifier on se place dans le cas où f est continue et C^1 par morceaux. D'une part le théorème de Dirichlet assure que $f = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e_n$, la convergence étant même normale. D'autre part le théorème de Parseval garantit lui que $\|f\|^2 = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$. On retrouve essentiellement les propriétés indiquées à la fin de la Section 1.2.1 dans le cas des espaces vectoriels munis de bases orthonormées. Dans un sens la famille $(e_n)_n$ n'est pas seulement une famille orthonormée, mais c'est une "base orthonormée". Il y a cependant une grosse différence : on fait des combinaisons linéaires infinies (et c'est ça qui n'est pas évident et qui a demandé du travail).

1.4.4 Les fonctions T-périodiques

Comme on l'a dit à la fin de la Section 1.1 si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est T-périodique avec $T > 0$, on peut se ramener au cas des fonctions 2π-périodiques en considérant la fonction $g(x) = f\left(\dfrac{T}{2\pi}x\right)$. On vérifie facilement que g est continue par morceaux, resp. C^1 par morceaux, si et seulement si f l'est. Ainsi, si f est C^1 par morceaux on peut appliquer le théorème de Dirichlet à la fonction g et on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)\mathrm{e}^{inx} = \frac{1}{2}\left(g(x^-)+g(x^+)\right), \qquad \forall x\in\mathbb{R},\\
\iff &\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)\mathrm{e}^{inx} = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{T}{2\pi}x^-\right)+f\left(\frac{T}{2\pi}x^+\right)\right), \qquad \forall x\in\mathbb{R},\\
\iff &\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)\mathrm{e}^{in\omega t} = \frac{1}{2}\left(f(t^-)+f(t^+)\right), \quad \forall t\in\mathbb{R},
\end{aligned}$$

où on rappelle que $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

De même si $f\in C^0_{2\pi,m}$ la formule de Parseval appliquée à la fonction g et le changement de variable $t=\frac{T}{2\pi}x$ donnent

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\right|^2\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T|f(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

Finalement, afin de ne faire apparaitre que la fonction f on peut noter en effectuant à nouveau le changement de variable $t=\frac{T}{2\pi}x$ que

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

On peut bien entendu faire la même chose pour les séries en sin / cos. On résume tout cela dans le théorme suivant.

Théorème 1.7. *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et T-périodique. On définit ses coefficients de Fourier*

$$c_n(f)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t,\ a_n(f)=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \ \text{ et }\ b_n(f)=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

La série de Fourier de f est la série trigonométrique

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\mathrm{e}^{in\omega t} = \frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos(n\omega t)+b_n(f)\sin(n\omega t).$$

Les séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2$ et $\sum_{n\geq1}|a_n(f)|^2+|b_n(f)|^2$ convergent et on a les formules de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2=\frac{1}{T}\int_0^T|f(t)|^2\,\mathrm{d}t \quad \text{ et } \quad \frac{|a_0(f)|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(f)|^2+|b_n(f)|^2=\frac{2}{T}\int_0^T|f(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

Enfin si f est de classe C^1 par morceaux sa série de Fourier converge simplement et pour tout $t\in\mathbb{R}$ on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\mathrm{e}^{in\omega t} = \frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos(n\omega t)+b_n(f)\sin(n\omega t) = \frac{1}{2}\left(f(t^-)+f(t^+)\right).$$

1.5 Compléments

1.5.1 Le théorème de Fejér

Lorsque f n'est pas C^1 par morceaux le théorème de Dirichlet ne s'applique pas. On peut même construire des fonctions continues dont la série de Fourier diverge en certains points. L'exemple ci-dessous est dû à Fejér.

Exemple 1.7. *Soit f la fonction 2π-périodique, paire et définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left((2^{n^3}+1)\frac{x}{2}\right)$. On vérifie facilement que la fonction f est continue sur $[0,\pi]$ (convergence normale de la série) et donc sur $\mathbb{R}$. On peut cependant montrer que la série de Fourier de f diverge en $x=0$. Plus précisément on peut montrer que la sous-suite $\left(S_{2^{N^3}+1}(f)(0)\right)_N$ tend vers $+\infty$.*

Lorsqu'une suite diverge on peut utiliser des notions un peu plus faibles de convergence (il en existe plusieurs). Celle qu'on va utiliser ici est la convergence au sens de Cesàro.

Définition 1.11. *Soit $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_n$ converge au sens de Cesàro vers $\ell \in \mathbb{C}$ si la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}$ converge vers ℓ. La suite $(v_n)_n$ est appelée la suite des moyennes de Cesàro de la suite $(u_n)_n$.*

Remarque 1.23. *L'unicité de la limite de la suite $(v_n)_n$, si cette limite existe, garantit que si une suite $(u_n)_n$ converge au sens de Cesàro alors sa limite est unique.*

On a indiqué ci-dessus que cette notion de convergence était "plus faible". On a en effet le résultat suivant.

Proposition 1.9. *Soit $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $(u_n)_n$ converge vers ℓ alors $(u_n)_n$ converge au sens de Cesàro vers $\ell \in \mathbb{C}$. La réciproque est fausse en général.*

Exemple 1.8. *Soit $(u_n)_n$ la suite de terme général $u_n = (-1)^n$. La suite $(u_n)_n$ diverge (ses sous-suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ ont des limites distinctes). Par contre elle converge au sens de Cesàro vers $\ell = 0$. En effet, on calcule facilement que si n est pair on a $v_n = \frac{1}{n+1}$ tandis que $v_n = 0$ si n est impair.*

Démonstration. Supposons que $(u_n)_n$ converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Si $n \geq n_0$ on a alors

$$\begin{aligned}
|v_n - \ell| &= \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k - \ell\right| = \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n}(u_k - \ell)\right| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_n - \ell| \\
&\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}|u_n - \ell| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0}^{n}|u_n - \ell| \\
&< \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}|u_n - \ell| + \frac{n-n_0+1}{n+1}\varepsilon \\
&\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}|u_n - \ell| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Comme la suite de terme général $w_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_n - \ell|$ tend vers 0 il existe n_1 tel que si $n \geq n_1$ on a $w_n < \varepsilon$. Finalement pour $n \geq N = \max(n_0, n_1)$ on a $|v_n - \ell| < 2\varepsilon$ ce qui prouve bien que $(v_n)_n$ tend vers ℓ. □

Peu après avoir trouvé son contre-exemple sur la convergence de séries de Fourier d'une fonction continue, sans hypothèse C^1 par morceaux, Fejér montre qu'on peut affaiblir l'hypothèse sur f à condition d'affaiblir la notion de convergence utilisée.

Définition 1.12. *Soit $f \in C^0_{2\pi,m}$. On appelle sommes de Fejér les moyennes de Cesàro des sommes partielles de la série de Fourier de f, i.e.*

$$T_N(f)(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f)(x).$$

Théorème 1.8. *[Fejér] Soit $f \in C^0_{2\pi,m}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ la suite $(S_N(f)(x))_N$ converge au sens de Cesàro vers $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$, i.e.*

$$\lim_{N\to\infty} T_N(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)).$$

Si de plus f est continue alors la convergence est uniforme, vers f.

L'idée de départ de la preuve est similaire à celle du théorème de Dirichlet : écrire $T_N(f)(x)$ sous la forme

$$T_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_N(t)\,\mathrm{d}t,$$

où F_N est une fonction à préciser. Cela se fait assez facilement. Pour tout $n \geq 0$ on a $S_n(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,\mathrm{d}t$ où D_n est le noyau de Dirichlet. On a donc

$$\begin{aligned} T_N(f)(x) &= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f)(x) \\ &= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\left(\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(t)\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On définit donc les fonctions F_N, appelées noyaux de Fejér, par

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(t).$$

Il découle directement des propriétés des fonctions D_n, voir le Lemme 1.2, que les fonctions F_N sont paires et vérifient

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} F_N(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

On pourra en particulier écrire, c'est l'analogue de (1.20),

$$T_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(x+t)+f(x-t))\,F_N(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.25}$$

Enfin, tout comme pour les noyaux de Dirichlet, on peut calculer explicitement les noyaux de Fejér. Si $t\in 2\pi\mathbb{Z}$ on a $D_n(t)=2n+1$ pour tout n donc

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^N (2n+1) = 1+\frac{2}{N+1}\sum_{n=0}^N n = N+1.$$

Et si $t\notin 2\pi\mathbb{Z}$ on a $D_n(t) = \dfrac{\sin\left(\left(N+\frac12\right)t\right)}{\sin\left(\frac t2\right)}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
F_N(t) &= \frac{1}{N+1}\times\frac{1}{\sin\left(\frac t2\right)}\times\sum_{n=0}^N \sin\left(\left(n+\frac12\right)t\right)\\
&= \frac{1}{N+1}\times\frac{1}{\sin\left(\frac t2\right)}\times \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^N \mathrm{e}^{i(n+1/2)t}\right)\\
&= \frac{1}{N+1}\times\frac{1}{\sin\left(\frac t2\right)}\times \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{it/2}\frac{1-\mathrm{e}^{i(N+1)t}}{1-\mathrm{e}^{it}}\right)\\
&= \frac{1}{N+1}\times\frac{1}{\sin\left(\frac t2\right)}\times \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{i(N+1)t/2}\frac{\sin\left((N+1)\,t/2\right)}{\sin\left(\frac t2\right)}\right)\\
&= \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\left((N+1)\,t/2\right)}{\sin\left(\frac t2\right)}\right)^2.
\end{aligned}$$

Ce qui va faire la différence avec les noyaux de Dirichlet c'est que les fonctions F_N sont toujours positives.

Lemme 1.3. *Pour tout* $0<\delta<\pi$ *on a* $\lim\limits_{N\to\infty}\displaystyle\int_\delta^\pi F_N(t)\,\mathrm{d}t = 0$ *et donc* $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\delta F_N(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Démonstration. Sur $[\delta,\pi]$ on a $\sin(t/2)\geq\sin(\delta/2)$ et donc $F_N(t)\leq \dfrac{1}{(N+1)\sin^2\left(\frac\delta2\right)}$. On en déduit que

$$0\leq \int_\delta^\pi F_N(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{\pi-\delta}{(N+1)\sin^2\left(\frac\delta2\right)}$$

et le résultat découle du théorème des gendarmes.

La deuxième limite découle simplement du fait que $\frac1\pi\int_0^\pi F_N(t)\,\mathrm{d}t = 1$ et de la relation de Chasles. □

L'idée est alors la suivante. Le lemme ci-dessus indique que lorsque $N\to\infty$ la fonction F_N se concentre principalement près de 0 : en dehors de tout intervalle $[\delta,\pi]$ l'intégrale de F_N tend vers 0 alors que F_N est positive. Dans (1.25), au moins lorsque N est grand, tout se passe donc dans un petit intervalle $[0,\delta]$, i.e.

$$T_N(f)(x)\simeq\frac{1}{2\pi}\int_0^\delta (f(x+t)+f(x-t))\,F_N(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\lim_{t\to 0^+} f(x\pm t) = f(x^\pm)$, si δ est petit on aura, sur $[0,\delta]$, $f(x\pm t)\simeq f(x^\pm)$ et donc

$$T_N(f)(x) \simeq \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \big(f(x^+)+f(x^-)\big)\,F_N(t)\,\mathrm{d}t \simeq \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\times\frac{1}{\pi}\int_0^\delta F_N(t)\,\mathrm{d}t \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}.$$

On termine la preuve en rendant rigoureuse l'idée d'argument ci-dessus. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{t\to 0^+} f(x\pm t) = f(x^\pm)$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t\in[0,\delta]$ on a $|f(x+t) - f(x^+)| < \varepsilon$ et $|f(x-t)-f(x^-)| < \varepsilon$. Pour ce $\delta > 0$ on a alors

$$\begin{aligned}
&\left|T_N(f)(x) - \frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^\pi f(x+t)+f(x-t)-f(x^+)-f(x^-))F_N(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left|f(x+t)+f(x-t)-f(x^+)-f(x^-)\right| F_N(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \left|f(x+t)+f(x-t)-f(x^+)-f(x^-)\right| F_N(t)\,\mathrm{d}t \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi \left|fx+t)+f(x-t)-f(x^+)-f(x^-)\right| F_N(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \left|f(x+t)-f(x^+)\right| F_N(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \left|f(x-t)-f(x^-)\right| F_N(t)\,\mathrm{d}t + \frac{2\|f\|_\infty}{\pi}\int_\delta^\pi F_N(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\delta F_N(t)\,\mathrm{d}t + \frac{2\|f\|_\infty}{\pi}\int_\delta^\pi F_N(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Comme la fonction F_N est positive on a, pour tout N, $\frac{1}{\pi}\int_0^\delta F_N(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{\pi}\int_0^\pi F_N(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Par ailleurs d'après le lemme $\lim_{N\to\infty}\frac{2\|f\|_\infty}{\pi}\int_\delta^\pi F_N(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc il existe N_0 tel que pour tout $N\geq N_0$ on a $\frac{2\|f\|_\infty}{\pi}\int_\delta^\pi F_N(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon$. Finalement, pour tout $N\geq N_0$ on a

$$\left|T_N(f)(x) - \frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))\right| < 2\varepsilon.$$

On a montré : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N_0 tel que si $N\geq N_0$ alors

$$\left|T_N(f)(x) - \frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))\right| < 2\varepsilon,$$

i.e. $\lim_{N\to\infty} T_N(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-)$.

Dans le cas où f est continue, en plus d'avoir $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$, cela garantit que f est uniformément continue sur $[0,2\pi]$ et donc sur $\mathbb{R}$ (par périodicité). Dans la fin de la preuve ci-dessus le δ ne dépend donc pas de $x\in\mathbb{R}$ et donc le N_0 non plus (il ne dépend que de δ). La dernière phrase s'écrit alors : pour tout $\varepsilon>0$ il existe N_0 tel que si $N\geq N_0$ alors pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $|T_N(f)(x) - f(x)| < 2\varepsilon$, c'est précisément la convergence uniforme de $T_N(f)$ vers f.

1.5.2 Transformation d'Abel et convergence des séries trigonométriques

Lorsqu'il n'y a pas convergence normale on peut parfois montrer la convergence simple de certaines séries trigonométriques à l'aide de ce qu'on appelle la transformation d'Abel. Celle-ci est l'analogue pour les sommes de l'intégration par parties pour les intégrales. Qu'un tel analogue existe n'est pas surprenant, une intégrale n'est qu'une (limite de) somme.

Etant données deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ et deux entiers $p < q$ on souhaite transformer la somme $\displaystyle\sum_{n=p}^{q} u_n v_n$. On ne traitera ici que des sommes finies tout comme l'intégration par parties ne se fait a priori que pour des intégrales sur des segments. Dans une intégration par partie on écrit

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.26}$$

L'analogue pour les suites de la dérivée f' est la différence $u_{n+1} - u_n$, ou bien $u_n - u_{n-1}$ c'est là qu'il faudra faire un peu attention avec le côté discret des suites. De même si on veut voir la suite v_n comme la dérivée g' il faut trouver une suite $(V_n)_n$ dont $(v_n)_n$ serait obtenue en faisant $v_n = V_{n+1} - V_n$ ou bien $V_n - V_{n-1}$. Il y a une façon simple de le faire : en prenant pour V_n les sommes partielles de la série $\sum v_n$.

Proposition 1.10. *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ et $p < q$ deux entiers. On note $(V_n)_n$ la suite des sommes partielles associée à la suite $(v_n)_n$, i.e. $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$, avec la convention $V_{-1} = 0$. Alors*

$$\sum_{n=p}^{q} u_n v_n = u_q V_q - u_p V_{p-1} - \sum_{n=p}^{q-1} (u_{n+1} - u_n) V_n.$$

Démonstration. Pour tout n on a $v_n = V_n - V_{n-1}$. On écrit alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=p}^{q} u_n v_n &= \sum_{n=p}^{q} u_n V_n - \sum_{n=p}^{q} u_n V_{n-1} \\
&= \sum_{n=p}^{q} u_n V_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} u_{n+1} V_n \\
&= u_q V_q - u_p V_{p-1} + \sum_{n=p}^{q-1} (u_n - u_{n+1}) V_n \\
&= u_q V_q - u_p V_{p-1} - \sum_{n=p}^{q-1} (u_{n+1} - u_n) V_n.
\end{aligned}$$

Remarque 1.24. *Plutôt que de prendre $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ on pourrait prendre n'importe quelle suite $(\tilde{V}_n)_n$ vérifiant $\tilde{V}_n - \tilde{V}_{n-1} = v_n$. On vérifie alors que*

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} \tilde{V}_k - \tilde{V}_{k-1} = \tilde{V}_n - \tilde{V}_{-1}.$$

Autrement dit les suites $(V_n)_n$ et $(\tilde{V}_n)_n$ ne diffèrent que par une constante : 2 primitives d'une fonction continue sont égales à constante près. Le choix de la suite des sommes partielles correspond au choix d'une primitive particulière.

Lorsque la série $\sum v_n$ converge, si on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$ le reste de la série on a alors $v_n = R_{n-1} - R_n$. Autrement dit la suite $(-R_n)_n$ est une "primitive" de la suite $(v_n)_n$. On peut alors écrire la transformation d'Abel correspondante, ce qui donne

$$\sum_{n=p}^{q} u_n v_n = -u_q R_q + u_p R_{p-1} + \sum_{n=p}^{q-1} (u_{n+1} - u_n) R_n. \tag{1.27}$$

Dans le cas des fonctions cela reviendrait au cas $g(x) = -\int_x^{+\infty} g'(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui est possible uniquement si l'intégrale $\int_a^{+\infty} g'(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

La transformation d'Abel permet de montrer facilement le résultat suivant qui s'applique très bien aux séries trigonométriques.

Théorème 1.9. *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ telles que*

1. *la suite $(u_n)_n$ est réelle et décroit vers 0.*
2. *la suite des sommes partielles $(V_n)_n$ associées à $(v_n)_n$ est bornée.*

Alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

Remarque 1.25. *Dans le cas où $v_n = (-1)^n$ on retrouve en fait le théorème des séries alternées.*

Démonstration. La transformation d'Abel avec $p = 0$ et $q = N$ permet d'écrire

$$\sum_{n=0}^{N} u_n v_n = u_N V_N + \sum_{n=0}^{N-1} (u_n - u_{n+1}) V_n.$$

Comme la suite $(V_n)_n$ est bornée et que la suite $(u_n)_n$ tend vers 0 on a $u_N V_N \to 0$. Il reste à montrer que la série $\sum (u_n - u_{n+1}) V_n$ converge. On va montrer qu'elle est en fait absolument convergente donc convergente.

En effet, puisque $(u_n)_n$ est décroissante on a $|(u_n - u_{n+1}) V_n| = (u_n - u_{n+1}) |V_n| \leq M(u_n - u_{n+1})$ où M est un majorant de la suite $(|V_n|)_n$. Or $\sum_{n=0}^{N} M(u_n - u_{n+1}) = M(u_0 - u_{N+1}) \to M u_0$. Par comparaison de séries à termes positifs on en déduit que la série $\sum |(u_n - u_{n+1}) V_n|$ converge et donc la série $\sum (u_n - u_{n+1}) V_n$ est bien absolument convergente. $\square$

Application à la convergence de séries trigonométriques. On va utiliser le théorème précédent avec $v_n = \sin(nx)$, $\cos(nx)$ ou e^{inx}. On calcule facilement que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{inx} = \begin{cases} \frac{1-\mathrm{e}^{i(N+1)x}}{1-\mathrm{e}^{ix}} = \mathrm{e}^{iNx/2} \frac{\sin((N+1)x/2)}{\sin(x/2)} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ N+1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{1.28}$$

En prenant les parties réelles et imaginaires on en déduit donc que

$$\sum_{n=0}^{N} \cos(nx) = \begin{cases} \cos(Nx/2)\frac{\sin((N+1)x/2)}{\sin(x/2)} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ N+1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{1.29}$$

et

$$\sum_{n=0}^{N} \sin(nx) = \begin{cases} \sin(Nx/2)\frac{\sin((N+1)x/2)}{\sin(x/2)} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{1.30}$$

Les sommes partielles (1.28) et (1.29) sont bornées pour tout $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ tandis que les sommes partielles (1.30) sont toujours bornées. Si on prend comme suite $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ cela montre par exemple la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série trigonométrique $\sum \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

En utilisant de façon un peu plus précise la transformation d'Abel on peut même montrer que si $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont, comme dans le théorème, deux suites réelles décroissantes et qui tendent vers 0 alors les séries trigonométriques $\sum a_n \cos(nx)$ et $\sum b_n \sin(nx)$ convergent uniformément sur tout intervalle $[\delta, 2\pi - \delta]$. En particulier leur somme sera donc continue sur tout intervalle $[\delta, 2\pi - \delta]$ et donc sur $]0, 2\pi[$. Par périodicité elle sera continue (au moins) sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

On traite le cas du sinus, l'autre se fait de la même façon. Soit $\delta > 0$. Pour tout $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ la transformation d'Abel donne

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx) = b_N \sin(Nx/2)\frac{\sin\left((N+1)x/2\right)}{\sin(x/2)} + \sum_{n=1}^{N-1}(b_n - b_{n+1})\sin(nx/2)\frac{\sin\left((n+1)x/2\right)}{\sin(x/2)}.$$

On montre que chacun des deux termes du membre de droite converge uniformément. Pour tout $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ on a $|\sin(x/2)| \geq |\sin(\delta/2)|$. Donc d'une part

$$\left| b_N \sin(Nx/2)\frac{\sin\left((N+1)x/2\right)}{\sin(x/2)} \right| \leq \frac{|b_N|}{\sin(\delta/2)} \to 0$$

et d'autre part

$$\left| (b_n - b_{n+1})\sin(nx/2)\frac{\sin\left((n+1)x/2\right)}{\sin(x/2)} \right| \leq \frac{b_n - b_{n+1}}{\sin(\delta/2)}.$$

Comme la série $\sum(b_n - b_{n+1})$ converge (c'est le même argument que dans la preuve du théorème), cela prouve que la série $\sum(b_n - b_{n+1})\sin(nx/2)\frac{\sin(n+1)x/2}{\sin(x/2)}$ converge normalement sur $[\delta, 2\pi - \delta]$ et donc uniformément.

CHAPITRE 2

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

2.1 Topologie et convergence dans $\mathbb{C}$

Les notions centrales dans le cours vont être les notions de dérivabilité, dans $\mathbb{C}$, et de séries entières, de la variable complexe. Dans les deux cas la notion de limite et/ou convergence est présente. Dans cette section on rappelle rapidement les éléments nécessaires dans la suite du cours. C'est l'adaptation à $\mathbb{C}$ de ce que vous avez pu faire dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^n$.

2.1.1 Module et distance

Afin de parler de convergence, ou limite, on a besoin d'avoir une notion de *distance* entre les éléments. Dans $\mathbb{R}$ la distance est obtenue à l'aide de la valeur absolue. Ici c'est simplement le module qui joue ce rôle. C'est d'ailleurs ce qu'on a fait dans le chapitre précédent quand on a parlé de convergence des séries de Fourier. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ la distance entre z_1 et z_2 est, par définition, $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. Ce qui traduit la fait qu'on ait une distance ce sont les trois propriétés suivantes :

1. Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a $|z_1 - z_2| = 0$ ssi $z_1 = z_2$, i.e. $d(z_1, z_2) = 0$ ssi $z_1 = z_2$,
2. Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$, i.e. $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$,
3. Pour tous $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ on a $|z_1 - z_3| \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|$, i.e. $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$.

La dernière inégalité découle de $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (voir TD1) avec $z = z_1 - z_2$ et $z' = z_2 - z_3$.

Remarque 2.1. *On identifie souvent $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (voir l'Exercice 11 du TD1 et la Section 2.3). Dans ce cas, en notant $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, on constate que $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ n'est rien d'autre que la distance euclidienne usuelle dans $\mathbb{R}^2$.*

2.1.2 Boules, ouverts et fermés

Notation. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. On notera $D(z_0, r)$ le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r, i.e. $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| < r\}$. On notera également $\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| \leq r\}$, resp. $C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| = r\}$, le disque fermé, resp. le cercle, de centre z_0 et de rayon r.

Définition 2.1. *Un ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit borné s'il existe $M > 0$ tel que $|z| \leq M$ pour tout $z \in \Omega$, i.e. tel que $\Omega \subset \overline{D}(0, M)$.*

Exercice 2.1. *Montrer Ω est borné si et seulement si il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tel que $\Omega \subset D(z_0, r)$.*

Définition 2.2. *Un ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit ouvert si pour tout $z \in \Omega$ il existe $r > 0$ tel que $D(z, r) \subset \Omega$.*

Définition 2.3. *Un ensemble $F \subset \mathbb{C}$ est dit fermé si son complémentaire $\Omega = F^c = \mathbb{C} \setminus F$ est ouvert.*

Remarque 2.2. *Les ensembles $\emptyset$ et $\mathbb{C}$ sont à la fois ouverts et fermés. Ce sont les seuls ensembles de $\mathbb{C}$ qui vérifient cette propriété.*

Exercice 2.2. *Montrer que pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et tout $r > 0$ le disque $D(z_0, r)$ est ouvert.*

Proposition 2.1. *1. Toute réunion d'ensembles ouverts est un ouvert et toute intersection finie d'ensembles ouverts est un ouvert.*

2. Toute intersection d'ensembles fermés est un fermé et toute réunion finie d'ensembles fermés est un fermé.

Exercice 2.3. *Démontrer la proposition. C'est la même preuve que dans $\mathbb{R}$ (voir cours de compléments d'analyse de L2).*

Définition-Proposition 2.4. *Soit $A \subset \mathbb{C}$.*

1. *Il existe un plus grand ouvert inclus dans A. On l'appelle intérieur de A, noté $\mathring{A}$. On a $z \in \mathring{A}$ si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $D(z, r) \subset A$.*
2. *Il existe un plus petit fermé contenant A. On l'appelle adhérence de A, noté $\overline{A}$. On a $z \in \overline{A}$ si et seulement si pour tout $r > 0$ on a $D(z, r) \cap A \neq \emptyset$.*

Définition 2.5. *Soit $A \subset \mathbb{C}$. On dit que*

1. *$z \in A$ est un point isolé de A s'il existe $r > 0$ tel que $D(z, r) \cap A = \{z\}$.*
2. *A est un ensemble discret si tous ses points sont isolés.*
3. *$z \in \mathbb{C}$ est un point d'accumulation de A si pour tout $r > 0$ on a $D(z, r) \cap A \neq \{z\}$ et $D(z, r) \cap A \neq \emptyset$.*

Remarque 2.3. *$z \in \mathbb{C}$ est un point d'accumulation de A si et seulement si $z \in \overline{A \setminus \{z\}}$.*

Exemple 2.1. *L'ensemble $A = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$ est un ensemble discret. Il admet 0 comme point d'accumulation.*

Exercice 2.4. *Soit Ω un ouvert non-vide. Montrer que tout $z \in \Omega$ est un point d'accumulation de Ω.*

2.1.3 Convergence de suites

Définition 2.6. *Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(z_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$, noté $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \ell$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |z_n - \ell| < \varepsilon.$$

Lorsqu'elle existe la limite est unique.

Remarque 2.4. *La suite $(z_n)_n$ converge (dans $\mathbb{C}$) vers ℓ si et seulement si les suites $(\mathrm{Re}(z_n))_n$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_n$ convergent (dans $\mathbb{R}$) respectivement vers $\mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(\ell)$. Cela découle de l'encadrement*

$$\max(|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|) \leq |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|.$$

Les propriétés qui suivent se montrent toutes exactement de la même façon que leurs analogues dans $\mathbb{R}$. Les preuves sont laissées à titre d'exercice.

Proposition 2.2. *Soient $(z_n)_n, (w_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On suppose $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \ell'$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha z_n + w_n = \alpha\ell + \ell'$ et $\lim\limits_{n\to\infty} z_n w_n = \ell\ell'$. Si de plus $w_n \neq 0$ pour tout n et $\ell' \neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{w_n} = \dfrac{\ell}{\ell'}$.*

Proposition 2.3. *Soit $F \subset \mathbb{C}$. L'ensemble F est fermé si et seulement si pour toute suite $(z_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$, si $(z_n)_n$ converge (dans $\mathbb{C}$) alors sa limite ℓ est dans F.*

Proposition 2.4. *Soit $A \subset \mathbb{C}$. $z \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite $(z_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.*

Corollaire 2.1. *$z \in \mathbb{C}$ est un point d'accumulation de A si et seulement si il existe $(z_n)_n \in (A \setminus \{z\})^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.*

Dans certaines situations on n'a pas accès à la limite, c'est souvent le cas lorsqu'on étudie la convergence des séries, et la notion de suite de Cauchy joue alors un rôle important.

Définition 2.7. *Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(z_n)_n$ est de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N,\ |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Théorème 2.1. *Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors la suite $(z_n)_n$ converge si et seulement si elle est de Cauchy. On dit que $\mathbb{C}$ est complet.*

Démonstration. On vérifie facilement que $(z_n)_n$ est de Cauchy si et seulement si les deux suites $(\mathrm{Re}(z_n))_n$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_n$ sont de Cauchy. Le résultat découle alors de son analogue pour les suites réelles : les suites réelles $(\mathrm{Re}(z_n))_n$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_n$ sont de Cauchy si et seulement si elles convergent. $\square$

Remarque 2.5. *C'est ce résultat qui est à la base de la propriété importante, puisqu'elle permet de se ramener aux séries à termes positifs, que toute série absolument convergente est* *convergente, i.e. si* $\sum |z_n|$ *converge alors* $\sum z_n$ *converge. En effet, si* $\sum |z_n|$ *converge alors la suite de terme général* $S_n = \sum_{k=0}^{n} |z_k|$ *converge donc elle est de Cauchy, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > m \geq N,\ |S_n - S_m| = \sum_{k=m+1}^{n} |z_k| < \varepsilon.$$

Etant donné $\varepsilon > 0$*, on prend* N *comme ci-dessus. Pour tous* $n > m \geq N$ *on a, en utilisant l'inégalité triangulaire,*

$$\left| \sum_{k=0}^{n} z_k - \sum_{k=0}^{m} z_k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} z_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |z_k| < \varepsilon.$$

La suite des sommes partielles $(Z_n)_n$*,* $Z_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$*, est donc de Cauchy et donc converge, i.e.* $\sum z_n$ *converge.*

2.1.4 Compacité

On rappelle qu'une sous-suite, ou suite extraite, d'une suite $(z_n)_n$ est une suite $(z_{\varphi(n)})_n$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante et que si la suite $(z_n)_n$ converge vers ℓ alors toute sous-suite de $(z_n)_n$ converge aussi vers ℓ (c'est comme dans $\mathbb{R}$).

Définition 2.8. *On dit que* ℓ *est une valeur d'adhérence de la suite* $(z_n)_n$ *s'il existe une sous-suite de* $(z_n)_n$ *qui converge vers* ℓ*.*

Définition 2.9. *Un ensemble* $K \subset \mathbb{C}$ *est dit compact si toute suite* $(z_n)_n$ *d'éléments de* K *admet une sous-suite qui converge dans* K*, i.e. la limite est aussi dans* K*. Autrement dit, quelle que soit* $(z_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ *il existe* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante et* $\ell \in K$ *tels que* $\lim_{n\to\infty} z_{\varphi(n)} = \ell$*.*

Proposition 2.5. $K \subset \mathbb{C}$ *est compact si et seulement si il est fermé et borné.*

Corollaire 2.2. *Si* $A \subset \mathbb{C}$ *est borné alors* $\overline{A}$ *est compact.*

2.1.5 Connexité par arcs

Définition 2.10. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *non-vide. On dit que* Ω *est connexe par arcs si pour tous* $z_1, z_2 \in \Omega$ *il existe un intervalle* $[a, b]$ *et* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *continue telle que* $\gamma(a) = z_1$*,* $\gamma(b) = z_2$ *et pour tout* $t \in [a, b]$ *on a* $\gamma(t) \in \Omega$*, autrement dit si n'importe quels points* z_1, z_2 *dans* Ω *peuvent être reliés par un chemin continu dans* Ω*.*

La notion de connexe par arcs est assez intuitive. Essentiellement un ensemble est connexe par arcs s'il est "constitué d'un seul morceau".

Remarque 2.6. *Dans la définition de connexe par arcs on suppose souvent que* $[a, b] = [0, 1]$*. Ce n'est pas restrictif. En effet, si* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *est comme dans la définition ci-dessus alors la fonction* $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to \mathbb{C}$ *définie par* $\tilde{\gamma}(u) = \gamma(a + u(b - a))$ *est continue et vérifie* $\tilde{\gamma}(0) = z_1$*,* $\tilde{\gamma}(1) = z_2$ *et* $\tilde{\gamma}(u) \in \Omega$ *pour tout* $u \in [0, 1]$*.*

Exemple 2.2. *1) Le segment d'extrêmités z_1 et z_2, noté $[z_1, z_2]$, peut être décrit par la fonction $\gamma : [0,1] \ni t \mapsto z_1 + t(z_2 - z_1) = (1-t)z_1 + tz_2$.*

2) Le cercle de centre z_0 et de rayon r peut étre décrit par la fonction $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}$.

Définition 2.11. *On appelle* domaine *de $\mathbb{C}$ tout ensemble ouvert et connexe par arcs.*

On rencontre parfois des notions un peu plus fortes que connexes par arcs.

Définition 2.12. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ non-vide. On dit que*

1. *Ω est convexe si pour tous $z_1, z_2 \in \Omega$ on a $[z_1, z_2] \subset \Omega$.*
2. *Ω est étoilé s'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que pour tout $z \in \Omega$ on a $[z_0, z] \subset \Omega$.*

Proposition 2.6. *Tout ensemble convexe est étoilé et tout ensemble étoilé est connexe par arcs.*

Exercice 2.5. *Démontrez la proposition ci-dessus.*

Exercice 2.6. *Montrer que pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ le disque $D(z_0, r)$ est un domaine.*

2.2 Fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

2.2.1 Limites

Le but de ce cours est l'étude des fonctions définies sur un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, i.e. $f : \Omega \to \mathbb{C}$, et en particulier des fonctions dérivables. Comme dans $\mathbb{R}$ les notions de continuité et de dérivabilité reposent sur la notion de limite.

Définition 2.13. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $a \in \overline{\Omega}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que f tend vers ℓ lorsque z tend vers a, noté $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \ell$, si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall z \in \Omega,\ |z-a| < \delta \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon.$$

Proposition 2.7. *Lorsqu'elle existe la limite est unique.*

Remarque 2.7. *La condition $a \in \overline{\Omega}$ garantit que quelque soit $\delta > 0$ l'ensemble $\{z \in \Omega \,|\, |z - a| < \delta\}$ n'est pas vide. C'est cela qui permet de garantir l'unicité de la limite, si elle existe.*

On a bien entendu toutes les propriétés usuelles sur les limites (somme, produit, quotient lorsque le dénominateur ne s'annule pas et a une limite non nulle, composée lorsque c'est possible). Cela peut se montrer facilement à l'aide de la proposition suivante.

Proposition 2.8. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $a \in \overline{\Omega}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On a $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \ell$ si et seulement si*

$$\forall (z_n)_n \in \Omega^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to\infty} z_n = a\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \ell.$$

A partir de la notion de limite on définit facilement les notions de fonctions continues et de fonctions dérivables comme on le fait dans $\mathbb{R}$. Les propriétés de base sont alors les même que dans $\mathbb{R}$ et se montrent exactement de la même façon.

2.2.2 Continuité

Définition 2.14. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. La fonction f est continue en z_0 si $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. Elle est continue sur Ω si elle est continue en tout $z_0 \in \Omega$.*

En utilisant la Proposition 2.8 on montre facilement les propriétés usuelles.

Proposition 2.9. *1) Soient $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ continues et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors les fonctions $f + \lambda g$ et fg sont continues. Si de plus g ne s'annule pas alors $\frac{f}{g}$ est continue.*
2) Soient $f : \Omega_f \to \mathbb{C}$ et $g : \Omega_g \to \mathbb{C}$ continues et telles que $f(\Omega_f) \subset \Omega_g$. Alors $g \circ f$ est continue sur Ω_f.

Exemple 2.3. *Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{C}$. De même pour les fonctions $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$, $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$, $z \mapsto \bar{z}$ et $z \mapsto |z|^2$. Si P et Q sont deux fonctions polynômes alors $f = \frac{P}{Q}$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \,|\, Q(z) = 0\}$. On rappelle que si Q est de degré n il possède au plus n racines, i.e. l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \,|\, Q(z) = 0\}$ a au plus n éléments.*

Pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ les principaux théorèmes que vous avez vus sont : le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que toute fonction continue sur un segment soit bornée et atteigne ses bornes, i.e. elle admet un minimum et un maximum. Ici cela ne peut plus avoir de sens puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$: si z, z' sont deux nombres complexes arbitraires que signifie $z \leq z'$? On a par contre la généralisation suivante du second résultat.

Théorème 2.2. *Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact et $f : K \to \mathbb{C}$ continue. Alors l'ensemble $f(K)$ est compact. En particulier il est borné, i.e. il existe M tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in K$. De plus la fonction $|f|$ admet un minimum et un maximum sur K.*

Démonstration. Soit $(w_n)_n \in (f(K))^{\mathbb{N}}$. On veut montrer que $(w_n)_n$ admet une sous-suite qui converge dans $f(K)$, i.e. il existe une sous-suite $(w_{\varphi(n)})_n$ et $w \in K$ tels que $\lim_{n\to\infty} w_{\varphi(n)} = w$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par définition, il existe $z_n \in K$ tel que $w_n = f(z_n)$. La suite $(z_n)_n$ ainsi construite est dans K qui est compact donc elle admet une sous-suite $(z_{\varphi(n)})_n$ convergeant vers un certain $z \in K$. Comme f est continue, la suite de terme général $f(z_{\varphi(n)}) = w_{\varphi(n)}$ converge vers $w = f(z) \in f(K)$. La suite $(w_n)_n$ possède donc bien une sous-suite convergente dans $f(K)$, ce qui prouve que $f(K)$ est compact.

Le même raisonnement appliqué à la fonction continue $|f| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ (c'est une composée de fonctions continues) montre que l'ensemble $|f|(K)$ est compact dans $\mathbb{R}$ donc en particulier il est fermé. Soit $M := \sup_{z\in K} |f(z)|$. On sait que M est fini puisque f est bornée, on va montrer que M est atteint. Comme $M := \sup_{z\in K} |f(z)|$ il existe $(w_n)_n$, $w_n = f(z_n)$, dans $|f|(K)$ telle que $w_n \to M$. Comme $|f|(K)$ est fermé on a $M \in |f|(K)$, i.e. il existe $z_M \in K$ tel que $|f(z_M)| = |f|(z_M) = M$. La fonction $|f|$ admet donc bien un maximum. Le même raisonnement montre que $|f|$ admet aussi un minimum. □

2.2.3 Dérivabilité

Pour parler de dérivabilité on va maintenant supposer que Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 2.15. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$.*

1. *On dit que f est dérivable en z_0 si la limite* $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ *existe (dans $\mathbb{C}$). On notera alors $f'(z_0)$ cette limite.*
2. *On dit que f est dérivable, ou* holomorphe, *sur Ω si f est dérivable en tout $z_0 \in \Omega$.*
3. *On dit que f est une fonction* entière *si f est holomorphe sur $\Omega = \mathbb{C}$.*
4. *On dit que f est de classe C^1 si elle est dérivable et si la fonction $f' : z \mapsto f'(z)$ est continue. Par récurrence elle est C^k, $k \geq 2$, si elle est C^{k-1} et si $f^{(k-1)}$ est C^1. Elle est C^∞ si elle est C^k pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.*

Remarque 2.8. *De façon équivalente f est dérivable en z_0 si la limite* $\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ *existe dans $\mathbb{C}$. Attention ici h est complexe ! ! La limite est alors $f'(z_0)$.*

On peut également reformuler la définition de dérivable de la façon suivante : f est dérivable en z_0 de dérivée $f'(z_0)$ si et seulement si au voisinage de z_0 on a

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|). \tag{2.1}$$

Les propriétés suivantes se montrent alors comme pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.10. *1. Soient $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphes et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors les fonctions $f + \lambda g$ et fg sont holomorphes et on a, pour tout $z_0 \in \Omega$,*

$$(f + \lambda g)'(z_0) = f'(z_0) + \lambda g'(z_0) \quad et \quad (fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

Si de plus g ne s'annule pas alors $\frac{f}{g}$ est holomorphe et on a, pour tout $z_0 \in \Omega$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

2. Soient $f : \Omega_f \to \mathbb{C}$ et $g : \Omega_g \to \mathbb{C}$ holomorphes et telles que $f(\Omega_f) \subset \Omega_g$. Alors $g \circ f$ est holomorphe sur Ω_f et on a $(g \circ f)'(z_0) = f'(z_0) \times g' \circ f(z_0)$ pour tout $z_0 \in \Omega_f$.

Exercice 2.7. *Montrez la proposition ci-dessus.*

Exemple 2.4. *1) Les fonctions polynômes sont holomorphes sur $\mathbb{C}$. Si P et Q sont deux fonctions polynômes alors $f = \frac{P}{Q}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \,|\, Q(z) = 0\}$.*
2) La fonction définie par $f(z) = \bar{z}$ n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$. En effet, soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Pour tout $h \neq 0$ on a $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$. Si h est réel on a donc $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = 1 \to 1$ lorsque $h \to 0$. Par contre si h est imaginaire pur on a $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = -1 \to -1$ lorsque $h \to 0$. La limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ n'existe donc pas, donc f n'est pas dérivable en z_0.
3) La fonction définie par $g(z) = |z|^2$ n'est dérivable qu'en $z_0 = 0$. En effet si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $h \neq 0$ on a

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{|z_0+h|^2 - |z_0|^2}{h} = \frac{z_0\bar{h} + \overline{z_0}h + |h|^2}{h} = z_0\frac{\bar{h}}{h} + \overline{z_0} + \bar{h}.$$

Les deux derniers termes ont une limite lorsque h tend vers 0. Par contre on a vu que $\frac{\bar{h}}{h}$ n'avait pas de limite, donc le premier terme n'a pas de limite sauf si $z_0 = 0$. Conclusion f n'est pas dérivable sauf en 0 où on a $f'(0) = 0$.

Exercice 2.8. *Etudier la dérivabilité des fonctions* $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ *et* $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$.

Définition 2.16. *Soit* $f : \Omega \to \mathbb{C}$. *On dit que* F *est une primitive de* f *sur* Ω *si* F *est holomorphe sur* Ω *et vérifie* $F' = f$.

Exemple 2.5. *Si* $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ *la fonction définie sur* $\mathbb{C}^*$ *par* $f(z) = z^m$ *admet pour primitive sur* $\mathbb{C}^*$ *la fonction* $F(z) = \frac{1}{m+1} z^{m+1}$. *On verra plus loin que la fonction* $z \mapsto \frac{1}{z}$ *n'a pas de primitive sur* $\mathbb{C}^*$.

Bien qu'à première vue tout semble similaire à ce qu'on fait dans $\mathbb{R}$ on va voir qu'il n'en est rien et que le fait de prendre des (limites de) taux d'accroissements dans $\mathbb{C}$ a de grosses conséquences :

1. il va être beaucoup plus difficile à une fonction d'être dérivable dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto |x|^2$ par exemple est dérivable dans $\mathbb{R}$ mais on a vu que $z \mapsto |z|^2$ n'était pas dérivable dans $\mathbb{C}$.
2. les fonctions dérivables auront beaucoup de propriétés qui ne sont pas forcément vraies dans $\mathbb{R}$. La plus frappante au début est sûrement le fait qu'une fonction holomorphe sera automatiquement C^∞ (et même mieux).
3. les fonctions continues n'ont pas forcément de primitive. C'est un peu relié au point précédent : si f a une primitive alors il existe F holomorphe telle que $F' = f$. Donc, d'après ce qu'on a dit dans le point précédent, F sera C^∞ et donc f aussi. En particulier f sera holomorphe. Conclusion : seules les fonctions holomorphes sur Ω peuvent avoir une primitive sur Ω. Attention on ne dit pas que toutes les fonctions holomorphes sur Ω ont une primitive sur Ω. Ce sera par exemple le cas de la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ mais n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$.

2.3 Dérivabilité dans $\mathbb{C}$ - Différentiabilité dans $\mathbb{R}^2$

Comme on l'a indiqué dans la Section 2.1.1 on identifie souvent $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ via l'application $J : \mathbb{C} \ni z = x + iy \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ il est alors naturel de se demande s'il y a une différence entre considérer f comme fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ ou comme fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, i.e. considérer la fonction $\tilde{f} = J \circ f \circ J^{-1} : (x, y) \mapsto (\mathrm{Re}(f(x + iy)), \mathrm{Im}(f(x + iy)))$ définie sur $\tilde{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+iy \in \Omega\}$. Comme on l'a remarqué la distance dans $\mathbb{C}$ donnée à l'aide du module correspond à la distance usuelle (euclidienne) dans $\mathbb{R}^2$. On peut donc a priori s'attendre à ce que tout se passe dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}^2$. Concernant la continuité cette idée est correcte.

Proposition 2.11. *Soit* $f : \Omega \to \mathbb{C}$. f *est continue en* $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ *si et seulement* $\tilde{f}$ *est continue en* (x_0, y_0).

Remarque 2.9. *La fonction* $\tilde{f}$ *est une fonction de deux variables à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$. *La notion de continuité est bien entendu celle que vous avez vue en L2.*

Exercice 2.9. *Démontrez la proposition ci-dessus.*

On va voir dans cette section que ce qui est vrai pour la continuité ne l'est plus en ce qui concerne la dérivabilité et qu'il est plus "difficile" pour une fonction d'être dérivable vue comme fonction dans $\mathbb{C}$ que comme fonction dans $\mathbb{R}^2$. Cela donnera un premier aperçu des contraintes imposées par $\mathbb{C}$.

On rappelle que pour des fonctions de deux variables l'analogue de la dérivabilité est la différentiabilité : si $U \subset \mathbb{R}^2$, $g : U \to \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$ alors g est différentiable en (x_0, y_0) si

1. les dérivées partielles $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$ existent,
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{g(x,y) - g(x_0,y_0) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) \times (x - x_0) - \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \times (y - y_0)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0.$

La seconde condition peut se réécrire

$$g(x,y) = g(x_0,y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) \times (x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \times (y - y_0) + o\left(\|(x,y) - (x_0,y_0)\|\right). \quad (2.2)$$

Une condition suffisante pour que g soit différentiable est que les deux dérivées partielles $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ soient des fonctions continues (on dit que g est C^1). Lorsque $g = (P, Q)$ est une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ elle est différentiable, resp. C^1, si et seulement si les deux fonctions P et Q sont différentiables, resp. C^1. En particulier si les deux fonctions P et Q sont des fonctions polynômes alors g est de classe C^1 et donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2.6. *1. Soit f_1 définie sur $\mathbb{C}$ par $f_1(z) = \bar{z}$. Alors $\tilde{f}_1(x,y) = (x, -y)$ est évidemment C^1, et donc différentiable, puisque les deux fonctions $P_1(x,y) = x$ et $Q_1(x,y) = -y$ sont des fonctions polynômes. Pourtant on a vu que f_1 n'était pas dérivable au sens complexe.*
2. Soit f_2 définie sur $\mathbb{C}$ par $f_2(z) = |z|^2$. Alors $\tilde{f}_2(x,y) = (x^2 + y^2, 0)$ est aussi C^1 puisque les deux fonctions $P_2(x,y) = x^2 + y^2$ et $Q_2(x,y) = 0$ sont des fonctions polynômes. De même on a vu que f_2 n'était pas dérivable au sens complexe, sauf en 0.

Comme le montre l'exemple ci-dessus on peut trouver des fonctions très simples qui sont dérivables / différentiables en tant que fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ mais pourtant les fonctions correspondantes f_1 et f_2 ne sont pas dérivables comme fonctions vues de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Dans la suite de cette section on va chercher à comprendre quel est le lien entre différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et dérivable dans $\mathbb{C}$. Etant donnée $f : \Omega \to \mathbb{C}$ on notera $P(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+iy))$ et $Q(x,y) = \mathrm{Im}(f(x+iy))$ de façon à ce que $\tilde{f} = (P, Q)$. En utilisant (2.2) on voit que la fonction $\tilde{f}$ est différentiable en (x_0, y_0) si les quatre dérivées partielles $\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ existent en ce point et si

$$\begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x_0,y_0) \\ Q(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o\left(\|(x,y) - (x_0,y_0)\|\right). \quad (2.3)$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ est la matrice jacobienne de $\tilde{f} = (u, v)$ au point (x_0, y_0). Si on note $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est A (Φ est ce qu'on appelle la différentielle de $\tilde{f}$ au point (x_0, y_0) habituellement notée $D\tilde{f}(x_0, y_0)$, cf cours de Calcul Différentiel du S6) l'identité (2.3) s'écrit

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x,y) &= \tilde{f}(x_0,y_0) + \Phi(x - x_0, y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|) \\ \iff \quad f(z) &= f(z_0) + J^{-1} \circ \Phi \circ J(z - z_0) + o(|z - z_0|). \end{aligned}$$

Si on compare avec (2.1) on constate que f sera dérivable en z_0 pourvu que $J^{-1}\circ\Phi\circ J(z-z_0) = f'(z_0)\times(z-z_0)$, i.e. que l'application $J^{-1}\circ\Phi\circ J$ soit $\mathbb{C}$-linéaire. Cela impose des conditions sur la matrice A (voir l'Exercice 11 du TD1) et donc sur les dérivées partielles de P et Q, à savoir

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Lemme 2.1. *Si $f:\Omega\to\mathbb{C}$ est dérivable en $z_0=x_0+iy_0\in\Omega$ alors les dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$ existent en (x_0,y_0) et on a*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) = \mathrm{Re}(f'(z_0)) \quad \textit{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) = -\mathrm{Im}(f'(z_0)). \tag{2.4}$$

Démonstration. On traite le cas de la fonction P, celui de Q est laissé à titre d'exercice. Pour $h\in\mathbb{R}^*$ tel que $(x_0+h,y_0)\in\tilde{\Omega}$ on a

$$\begin{aligned}\frac{P(x_0+h,y_0)-P(x_0,y_0)}{h} &= \frac{\mathrm{Re}(f(z_0+h))-\mathrm{Re}(f(z_0))}{h}\\ &\overset{h\in\mathbb{R}}{=} \mathrm{Re}\left(\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}\right) \overset{h\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(f'(z_0)),\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)$ existe et vaut $\mathrm{Re}(f'(z_0))$.

De même pour $h\in\mathbb{R}^*$ tel que $(x_0,y_0+h)\in\tilde{\Omega}$ on a

$$\begin{aligned}\frac{P(x_0,y_0+h)-P(x_0,y_0)}{h} &\overset{h\in\mathbb{R}}{=} \mathrm{Re}\left(\frac{f(z_0+ih)-f(z_0)}{h}\right)\\ &= -\mathrm{Im}\left(\frac{f(z_0+ih)-f(z_0)}{ih}\right) \overset{h\to 0}{\longrightarrow} -\mathrm{Im}(f'(z_0)),\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)$ existe et vaut $-\mathrm{Im}(f'(z_0))$. $\square$

Notation. On note en général $\frac{\partial f}{\partial x}(x+iy) := \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x+iy) := \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$. La notation est naturelle puisque P et Q représentent les parties réelles et imaginaires de f, la seule différence étant que f est définie sur $\mathbb{C}$ tandis que P et Q le sont sur $\mathbb{R}^2$. En utilisant l'application J qui identifie $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$ on a en fait simplement $\frac{\partial f}{\partial x} = J^{-1}\circ\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}\circ J$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = J^{-1}\circ\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}\circ J$.

Avec cette notation le Lemme 2.1 s'écrit : si f est dérivable en z_0 alors les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ existent et on a $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f'(z_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = if'(z_0)$.

Proposition 2.12. *Soit $f:\Omega\to\mathbb{C}$ et $z_0\in\Omega$. f est dérivable en $z_0=x_0+iy_0$ si et seulement si $\tilde{f}$ est différentiable en (x_0,y_0) et que de plus*

$$i\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \iff \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \quad \textit{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0). \tag{2.5}$$

Ces deux égalités s'appellent les conditions de Cauchy-Riemann. Dans ce cas on a

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Démonstration. Supposons que f est dérivable en z_0. D'après le Lemme 2.1 les dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$ existent en (x_0, y_0). Si $z = x + iy \in \Omega$ on a, d'après (2.4),

$$\begin{aligned}
& P(x,y) - P(x_0,y_0) - \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\
= \; & \mathrm{Re}(f(z)) - \mathrm{Re}(f(z_0)) - \mathrm{Re}(f'(z_0))\mathrm{Re}(z-z_0) + \mathrm{Im}(f'(z_0))\mathrm{Im}(z-z_0) \\
= \; & \mathrm{Re}(f(z)) - \mathrm{Re}(f(z_0)) - \mathrm{Re}\left(f'(z_0)(z-z_0)\right) \\
= \; & \mathrm{Re}\left(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)\right).
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
& \left| P(x,y) - P(x_0,y_0) - \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \right| \\
= \; & \left|\mathrm{Re}\left(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)\right)\right| \\
\leq \; & |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)| && \text{car } |\mathrm{Re}(w)| \leq |w| \text{ pour tout } w \in \mathbb{C} \\
= \; & o(|z-z_0|) && \text{car } f \text{ est dérivable en } z_0 \\
= \; & o\left(\|(x,y) - (x_0,y_0)\|\right),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que P est différentiable en (x_0, y_0). Le raisonnement est le même pour Q en remplaçant Re par Im.

Montrons maintenant la réciproque. On suppose que u et v sont différentiables en (x_0, y_0) et que (2.5) est vérifiée. On a alors, pour $z = x + iy \in \Omega$, et en utilisant (2.5)

$$\begin{aligned}
f(z) &= P(x,y) + iQ(x,y) \\
&= P(x_0,y_0) + \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\
&\quad + iQ(x_0,y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + i\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + o\left(\|(x,y)-(x_0,y_0)\|\right) \\
&= f(z_0) + \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)(z-z_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)(z-z_0) + o(|z-z_0|),
\end{aligned}$$

et donc $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)$ existe, i.e. f est dérivable en z_0 avec

$$f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0),$$

où on utilise à nouveau (2.5) pour obtenir la dernière égalité. □

Remarque 2.10. *Lorsque* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *existent on utilise également les notations suivantes :*

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \textit{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

La proposition ci-dessus peut alors se traduire sous la forme : f est dérivable en z_0 si et seulement si $\tilde{f}$ est différentiable en z_0 avec de plus $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$. Dans ce cas $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

Comme une fonction holomorphe est différentiable si on la voit comme fonction sur $\mathbb{R}^2$ toutes les propriétés valables pour les fonctions différentiables sont vraies pour les fonctions holomorphes. On utilisera la propriété suivante qui est une conséquence de l'inégalité des accroissements finis (voir le cours de fonctions de plusieurs variables de L2 et le cours de calcul différentiel du S6). On en donnera une autre preuve dans la Section 4.3.

Proposition 2.13. *Si Ω est un domaine de $\mathbb{C}$, i.e. un ouvert connexe par arcs, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe de dérivée nulle alors f est constante.*

Remarque 2.11. *Pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ le résultat analogue repose aussi sur les accroissements finis et n'est vrai que pour les fonctions définies sur un intervalle. L'hypothèse "intervalle" est ici remplacée par "connexe par arcs" : l'ensemble de définition doit être en un seul morceau.*

CHAPITRE 3

FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE SÉRIE ENTIÈRE

Les seuls exemples de fonctions dérivables dans $\mathbb{C}$ qu'on a vus sont les polynômes et les quotients de polynômes. Afin d'enrichir la "collection" de ces fonctions dérivables après les polynômes l'étape naturelle suivante est d'essayer les polynômes de "degré infini", autrement dit les fonctions définies par des séries entières.

3.1 Suites et séries de fonctions de la variable complexe

Certains des résultats que vous avez vus sur les suites et séries de fonctions d'une variable réelle se généralisent facilement au cas des fonctions d'une variable complexe. On les utilisera par la suite surtout dans le cadre des séries entières.

Définition 3.1. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $\Omega \subset \mathbb{C}$. On dit que*

1. *$(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ si pour tout $z \in \Omega$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$.*
2. *$(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ si $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{z\in\Omega} |f_n(z) - f(z)| = 0$.*

La convergence uniforme implique bien entendu la convergence simple. Son intérêt se trouve par exemple dans la propriété suivante.

Proposition 3.1. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur Ω alors sa limite f est continue sur Ω.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$. Il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $z \in \Omega$ vérifie $|z - z_0| < \delta$ alors $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Pour tout $z \in \Omega$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |(f(z) - f_n(z)) + (f_n(z) - f_n(z_0)) + (f_n(z_0) - f(z_0))| \\ &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &\leq 2 \sup_{z\in\Omega} |f_n(z) - f(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)|. \end{aligned}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n)_n$ converge uniformément vers f il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $\sup_{z\in\Omega} |f_n(z) - f(z)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Pour ce N on a donc pour tout $z \in \Omega$

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + |f_N(z) - f_N(z_0)|.$$

Puisque f_N est continue il existe $\delta > 0$ tel que si $|z - z_0| < \delta$ alors $|f_N(z) - f_N(z_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Finalement pour tout z tel que $|z - z_0| < \delta$ on a $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ ce qui prouve que f est continue en z_0. C'est vrai pour tout $z_0 \in \Omega$ donc f est continue sur Ω. □

Dans le cas des fonctions d'une variable réelle, même à valeurs complexes, on a également le résultat suivant sur l'interversion limite/intégrale.

Proposition 3.2. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Remarque 3.1. *1. La convergence uniforme garantit que f est continue donc l'intégrale de f a un sens.*

2. La convergence de la suite $\displaystyle\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_n$ fait partie du résultat.

3. Lorsque la convergence n'est pas uniforme, mais qu'on a juste convergence simple, les deux propriétés ci-dessus (continuité de la limite et interversion limite intégrale) sont fausses (voir cours de L2).

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$0 \leq \left| \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leq (b-a) \times \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

et le résultat découle de la convergence uniforme et du théorème des gendarmes. □

Dans la suite on utilisera ces résultats surtout dans le cadre des séries de fonctions.

Définition 3.2. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $\Omega \subset \mathbb{C}$. On dit que*

1. *la série $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ si la suite des sommes partielles $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^n f_k\right)_n$ converge simplement vers f. On notera alors $f = \displaystyle\sum_{n=0}^\infty f_n$.*
2. *la série $\sum f_n$ converge uniformément vers la fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ si la suite des sommes partielles $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^n f_k\right)_n$ converge uniformément vers f, i.e. si*
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\Omega} \left| \sum_{k=n+1}^\infty f_k(z) \right| = 0.$$
3. *la série $\sum f_n$ converge normalement s'il existe $(\alpha_n)_n$ telle que $|f_n(z)| \leq \alpha_n$ pour tout $z \in \Omega$ et tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que $\sum \alpha_n$ converge. De façon équivalente, $\sum f_n$ converge normalement si la série numérique de terme général $\sup_{z\in\Omega} |f_n(z)|$ converge.*

Proposition 3.3. *Si la série $\sum f_n$ converge normalement alors elle converge uniformément. En particulier*

1. *si les f_n sont continues sur Ω alors la fonction définie par $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ est continue sur Ω.*
2. *si les f_n sont définies et continues sur un intervalle $[a,b]$ alors f est continue et $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx$.*

Démonstration. Soit $(\alpha_n)_n$ telle que $|f_n(z)| \leq \alpha_n$ pour tout $z \in \Omega$ et tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que $\sum \alpha_n$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, pour tout $z \in \Omega$ la série $\sum |f_n(z)|$ converge donc la série $\sum f_n(z)$ aussi (la convergence absolue entraine la convergence). La fonction $f = \sum f_n$ est donc bien définie. De plus, pour tous $m > n$ et tout $z \in \Omega$ on a

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k.$$

En passant à la limite $m \to \infty$ on a ainsi, pour tout $z \in \Omega$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k$$

et donc $\sup_{z\in\Omega} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k$. Le membre de droite est le reste d'une série convergente donc tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On en déduit la convergence uniforme de $\sum f_n$ à l'aide du théorème des gendarmes.

Les deux autres propriétés découlent directement de la convergence uniforme et des Propositions 3.1 et 3.2 appliquées à la suite des sommes partielles. □

3.2 Séries entières

Définition 3.3. *On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ où z est une variable complexe et $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.*

Définition 3.4. *On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ la quantité*

$$R := \sup\{r \geq 0 \,|\, \textit{la suite } (a_n r^n)_n \textit{ est bornée}\} \in [0, +\infty].$$

$D(0,R)$ est appelé disque de convergence de la série entière.

Remarque 3.2. *R est bien défini car l'ensemble $\{r \geq 0 \,|\, \text{la suite } (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\}$ est non-vide (il contient 0).*

La terminologie rayon de convergence est justifiée par le résultat suivant.

Proposition 3.4. *Soit R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$.*

1. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente, donc convergente.*
2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$ la série $\sum a_n z^n$ est divergente.*

Remarque 3.3. *La proposition montre qu'on pourrait définir de façon équivalente le rayon de convergence par $R = \sup\{r \geq 0 \,|\, \text{la série} \sum a_n r^n \text{ converge}\}$. On a également la propriété parfois utile qui découle de 2. : si $z \in \mathbb{C}$ est tel que la série $\sum a_n z^n$ converge alors $R \geq |z|$.*

Démonstration. 1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. Si $R = 0$ il n'y a rien à prouver, on suppose donc $R \neq 0$. Soit r tel que $|z| < r < R$. Par définition de R la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée, i.e. il existe $M \geq 0$ tel que $|a_n r^n| \leq M$ pour tout n. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n z^n| = |a_n r^n| \times \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \leq M \left(\frac{|z|}{r}\right)^n.$$

Comme $\frac{|z|}{r} < 1$ la série $\sum M \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$ converge donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum |a_n z^n|$ converge.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$. Par définition de R la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée donc ne tend pas vers 0. Nécessairement la série $\sum a_n z^n$ diverge. $\square$

Le domaine de convergence de la série entière est donc essentiellement déterminé par son rayon de convergence. Cependant le théorème précédent ne dit rien sur la convergence de la série lorsque $|z| = R$. La somme d'une série entière est donc une fonction f définie a priori sur l'ouvert $D(0, R)$. Afin d'étudier les propriétés de f le résultat suivant jouera un rôle crucial.

Proposition 3.5. *Pour tout $r < R$ la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$. En particulier la fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est continue sur $D(0, R)$.*

Démonstration. L'idée de la preuve est similaire à celle de la Proposition 3.4. Soit $r < R$ et ρ tel que $r < \rho < R$. Par définition de R la suite $(a_n \rho^n)_n$ est bornée, i.e. il existe $M \geq 0$ tel que $|a_n \rho^n| \leq M$ pour tout n. Pour tout $z \in \overline{D}(0, r)$ on a

$$|a_n z_n| = |a_n \rho^n| \times \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \leq M \left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

Comme $\frac{r}{\rho} < 1$ la série $\sum M \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ converge et donc la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$.

En utilisant la Proposition 3.3 on en déduit que f est continue sur $D(0, r)$ pour tout $r < R$ et donc sur $D(0, R)$. En effet, si $z_0 \in D(0, R)$ il existe r tel que $|z_0| < r < R$. En particulier $z_0 \in D(0, r)$ et comme f est continue sur $D(0, r)$ elle est continue en z_0. $\square$

Les critères suivants permettent de calculer le rayon de convergence. Ils découlent des critères de D'Alembert et de Cauchy pour les séries numériques à termes positifs.

Proposition 3.6 (Règle de D'Alembert)**.** *On suppose que $a_n \neq 0$ pour n assez grand. Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ (éventuellement $\ell = +\infty$) alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$, avec la convention $R = 0$ si $\ell = +\infty$ et $R = +\infty$ si $\ell = 0$.*

Proposition 3.7 (Règle de Cauchy)**.** *Si $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \ell$ (éventuellement $\ell = +\infty$) alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$, avec les mêmes conventions que ci-dessus.*

Remarque 3.4. *Dans la règle de Cauchy on peut remplace* $\lim$ *par* $\limsup$. *Cette dernière a l'avantage de toujours exister contrairement à la limite. On parle alors de règle d'Hadamard (ou de Cauchy-Hadamard).*

Remarque 3.5. *Ces règles sont souvent utilisées dans la pratique. Il est cependant parfois plus simple de revenir à la définition du rayon de convergence. Par exemple, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^{n^2}$ a pour rayon de convergence* 1. *Notez qu'ici la suite a_n est définie par $a_n = 1$ si n est un carré et $a_n = 0$ sinon, on ne pourra donc même pas essayer d'appliquer la règle de D'Alembert.*

Les propriétés générales suivantes s'intéressent à la somme et au produit de séries entières.

Proposition 3.8. *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b et $\lambda \in \mathbb{C}$. On note f et g la somme de ces séries sur leur disque de convergence respectif. Alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + \lambda b_n) z^n$ vérifie $R \geq \min\{R_a, R_b\}$ et sur $D(0, \min\{R_a, R_b\})$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + \lambda b_n) z^n = f(z) + \lambda g(z)$.*

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$. Alors les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent donc la série de terme général $(a_n + \lambda b_n) z^n = a_n z^n + \lambda b_n z^n$ converge et on a $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + \lambda b_n) z^n = f(z) + \lambda g(z)$. Cela prouve, voir la Remarque 3.3, que le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + \lambda b_n) z^n$ vérifie $R \geq |z|$. Comme c'est vrai pour tout $|z| < \min\{R_a, R_b\}$ on en déduit que $R \geq \min\{R_a, R_b\}$. □

Afin d'étudier le produit de séries entières on aura besoin du résultat suivant.

Proposition 3.9. *Soit $(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que les séries $\sum_n \alpha_n$ et $\sum \beta_n$ soient absolument convergentes. Alors la série de terme général $\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}$ est absolument convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n\right). \tag{3.1}$$

La série $\sum \gamma_n$ est appelée produit de Cauchy des séries $\sum \alpha_n$ et $\sum \beta_n$.

Remarque 3.6. *Si seulement l'une des deux séries $\sum \alpha_n$ ou $\sum \beta_n$ est absolument convergente et que l'autre est convergente mais pas absolument alors on peut montrer que $\sum \gamma_n$ est convergente (mais pas absolument) et que (3.1) reste vraie. Si par contre aucune des deux séries $\sum \alpha_n$ et $\sum \beta_n$ n'est supposée absolument convergente, tout en étant toutes les deux convergentes, il se peut que la série $\sum \gamma_n$ diverge (voir TD).*

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} |\gamma_n| &\leq \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| \times |\beta_{n-k}| \right) && \text{Inégalité triangulaire} \\
&= \sum_{k=0}^{N} \sum_{n=k}^{N} |\alpha_k| \times |\beta_{n-k}| && \text{Interversion des sommes sur } n \text{ et } k \\
&= \sum_{k=0}^{N} \left(|\alpha_k| \times \sum_{n=k}^{N} |\beta_{n-k}| \right) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \left(|\alpha_k| \times \sum_{j=0}^{N-k} |\beta_j| \right) && \text{Décalage d'indice} \\
&\leq \sum_{k=0}^{N} \left(|\alpha_k| \times \sum_{j=0}^{\infty} |\beta_j| \right) && \text{Termes positifs} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| \times \sum_{j=0}^{\infty} |\beta_j|. && \text{Termes positifs}
\end{aligned}
$$

La suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^{N} |\gamma_n| \right)_N$ est donc bornée. On en déduit que la série $\sum |\gamma_n|$ converge (car c'est une série à termes positifs).

On montre maintenant (3.1). Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$
\begin{aligned}
\left| \left(\sum_{n=0}^{N} \alpha_n \right) \left(\sum_{n=0}^{N} \beta_n \right) - \sum_{k=0}^{N} \gamma_n \right| &= \left| \sum_{n,m=0}^{N} \alpha_n \beta_m - \sum_{k=0}^{N} \sum_{n=0}^{k} \alpha_n \beta_{k-n} \right| \\
&= \left| \sum_{n,m=0}^{N} \alpha_n \beta_m - \sum_{k=0}^{N} \sum_{\substack{0 \leq n,m \leq N \\ n+m=k}} \alpha_n \beta_m \right| \\
&= \left| \sum_{0 \leq n,m \leq N} \alpha_n \beta_m - \sum_{\substack{0 \leq n,m \leq N \\ n+m \leq N}} \alpha_n \beta_m \right| \\
&= \left| \sum_{\substack{0 \leq n,m \leq N \\ n+m > N}} \alpha_n \beta_m \right| \\
&\leq \sum_{\substack{0 \leq n,m \leq N \\ n+m > N}} |\alpha_n| \times |\beta_m| \\
&\leq \sum_{\substack{n,m \in \mathbb{N} \\ n+m > N}} |\alpha_n| \times |\beta_m| \\
&= \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} |\alpha_n| \times |\beta_{k-n}|.
\end{aligned}
$$

Le membre de droite est le reste de la série de terme général $u_k = \sum_{n=0}^{k} |\alpha_n| \times |\beta_{k-n}|$. Comme les séries $\sum |\alpha_n|$ et $\sum |\beta_n|$ convergent (absolument) d'après la première partie de la preuve la série $\sum u_k$ converge (absolument) donc son reste tend vers 0. En passant à la limite $N \to \infty$ on obtient donc

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \alpha_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} \beta_n\right) - \sum_{n=0}^{N} \gamma_n = 0,$$

et comme les trois séries $\sum \alpha_n$, $\sum \beta_n$ et $\sum \gamma_n$ convergent cela prouve (3.1). □

Proposition 3.10. *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b et $\lambda \in \mathbb{C}$. On note f et g la somme de ces séries sur leur disque de convergence respectif. Si $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, le rayon de convergence R de la série entière $\sum c_n z^n$ vérifie $R \geq \min\{R_a, R_b\}$ et sur le disque de rayon $\min\{R_a, R_b\}$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z) \times g(z)$.*

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$. Alors les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent absolument donc on peut appliquer la Proposition 3.9. On en déduit que la série de terme général

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = c_n z^n$$

converge et vérifie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)g(z)$. La fin de la preuve est ensuite la même que pour la somme des séries entières. □

La question naturelle suivante est celle de la dérivabilité, au sens complexe, des fonctions définies par des séries entières.

Proposition 3.11. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors la série entière $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ a pour rayon de convergence R. De plus la fonction f définie sur $D(0,R)$ par $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est holomorphe et on a*

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Corollaire 3.1. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Sa somme définit une fonction infiniment dérivable sur $D(0,R)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $z \in D(0,R)$ on a*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n z^{n-k}.$$

En particulier on a $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 3.7. *A l'aide des séries entières on peut ainsi fabriquer de nouvelles fonctions holomorphes, en plus des polynômes et des fractions rationnelles. On peut également remarquer que, tout comme pour les polynômes et les fractions rationnelles, ces fonctions sont automatiquement C^∞ (sur leur disque de convergence).*

Démonstration. On note R' le rayon de convergence de la série entière $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$. Montrons que $R = R'$. Par définition de R', si $r < R'$ la suite de terme général $b_n = (n+1)a_{n+1}r^n$ est bornée. Or, pour $n \geq 1$,

$$|a_n r^n| = r|a_n r^{n-1}| \leq r \times |na_n r^{n-1}|$$

donc la suite $(a_n r^n)_n$ est aussi bornée ce qui prouve que $R \geq r$. Comme c'est vrai pour tout $r < R'$ on en déduit que $R \geq R'$. Réciproquement, soit $r < R$ et ρ tel que $r < \rho < R$. On a

$$(n+1)a_{n+1}r^n = \frac{1}{\rho}(n+1)\left(\frac{r}{\rho}\right)^n a_{n+1}\rho^{n+1}.$$

Puisque $\rho < R$ la suite $(a_n\rho^n)_n$ est bornée et comme $\frac{r}{\rho} < 1$ on a $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\left(\frac{r}{\rho}\right)^n = 0$. Finalement la suite $((n+1)a_{n+1}r^n)_n$ tend vers 0 donc est bornée. Cela prouve que $r \leq R'$. Comme c'est vrai pour tout $r < R$ on obtient $R \leq R'$.

Montrons maintenant que f est dérivable sur $D(0,R)$ et que $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$. Soit $z_0 \in D(0,R)$ et $r < R - |z_0|$, de façon à ce que $D(z_0,r) \subset D(0,R)$. Pour tout $z \in D(z_0,r)$, $z \neq z_0$, on a

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0}.$$

Sur $D(z_0,r)$ on définit la fonction $g_n(z) = a_n\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}$ si $z \neq z_0$ et $g_n(z_0) = na_n z_0^{n-1}$. Les fonctions g_n sont continues sur $D(z_0,r)$ (expliquez pourquoi). On va montrer que la série $\sum g_n$ converge normalement sur $D(z_0,r)$. En effet, pour tout $z \in D(z_0,r)$ et $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned}
|z^n - z_0^n| &= \left|(z-z_0)\sum_{k=0}^{n-1} z_0^k z^{n-1-k}\right| \\
&\leq |z-z_0| \times \sum_{k=0}^{n-1} |z_0|^k |z|^{n-1-k} \\
&\leq |z-z_0| \times \sum_{k=0}^{n-1} (|z_0|+r)^k (|z_0|+r)^{n-1-k} \qquad \text{car } z \in D(z_0,r) \Rightarrow |z| \leq r + |z_0| \\
&= |z-z_0| \times n(|z_0|+r)^{n-1}
\end{aligned}$$

et donc $|g_n(z)| \leq n|a_n|(|z_0|+r)^{n-1}$. Puisque $|z_0|+r < R$ la série $\sum n|a_n|(|z_0|+r)^{n-1}$ converge donc la série $\sum g_n$ converge normalement sur $D(z_0,r)$. Sa somme est donc continue, en particulier elle est continue en z_0, i.e.

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z_0^{n-1}. \qquad \square$$

Dans tout ce qu'on a fait on a considéré des séries entières “centrées en 0”. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ on peut de façon analogue considérer des séries entières “centrées en z_0”, i.e. de la forme $\sum a_n(z-z_0)^n$. Si la série entière $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R alors la série $\sum a_n(z-z_0)^n$ converge normalement sur tout disque $D(z_0, r)$ avec $r < R$ et diverge pour tout $z \notin \overline{D}(z_0, R)$. Par ailleurs, si g note la somme de la série $\sum a_n z^n$ et f celle de la série $\sum a_n(z-z_0)^n$ alors pour tout $z \in D(z_0, R)$ on a $f(z) = g(z - z_0)$. Tous les résultats qu'on a vus dans cette section se généralisent donc immédiatement aux fonctions définies par des séries entières de la forme $\sum a_n(z-z_0)^n$.

En particulier si $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ sur $D(z_0, R)$ alors pour tout n on a $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$: les coefficients d'une série entière centrée en z_0 sont naturellement reliés aux dérivées successives de sa somme f en z_0. Il n'est cependant pas toujours pratique de calculer ces dérivées. On termine cette section avec un résultat qui montre comment on peut obtenir les coefficients a_n uniquement à l'aide de f, sans utiliser les dérivées de cette dernière. Ce résultat va permettre de faire un premier lien entre les séries entières et les séries trigonométriques.

Proposition 3.12. *Soit $\sum a_n(z-z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ (éventuellement $R = +\infty$). On note f sa somme. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r \in]0, R[$ on a*

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{e}^{-int}\, \mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soit $r \in]0, R[$. On note g_r la fonction 2π-périodique définie par $g_r(t) = f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right)$. Comme f est la somme d'une série entière elle est C^∞ dans $D(0, R)$ et donc en particulier C^1. La fonction g_r est donc de classe C^1 et, par définition de f, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$g_r(t) = f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{int},$$

i.e. g_r est une série trigonométrique. Comme $r < R$ la série $\sum |a_n r^n|$ converge. Ainsi la série trigonométrique converge normalement et donc d'après le Théorème 1.1 on a

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_r(t) \mathrm{e}^{-int}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{e}^{-int}\, \mathrm{d}t.$$

□

3.3 La fonction exponentielle

Parmi toutes les fonctions définies par une série entière la plus importante est certainement la fonction exponentielle.

Définition-Proposition 3.5. *La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$. Sa somme est la fonction exponentielle, notée $\exp(z)$ ou e^z.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la règle de D'Alembert. □

Définition 3.6. *Les fonctions* cos *(cosinus) et* sin *(sinus)sont définies sur* $\mathbb{C}$ *par*

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad et \quad \sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

On a alors $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$.

Remarque 3.8. *1. Par définition les restrictions des fonctions exponentielles, sinus et cosinus à* $\mathbb{R}$ *sont à valeurs réelles. En particulier si* $z = it \in i\mathbb{R}$, *et puisque* $\exp(it) = \cos(t) + i\sin(t)$, *on a* $\cos(t) = \mathrm{Re}(\exp(it))$ *et* $\sin(t) = \mathrm{Im}(\exp(it))$. *Attention, si* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *les nombres* $\cos(z)$ *et* $\sin(z)$ *ne sont par réels et* $\cos(z)$ *et* $\sin(z)$ *ne sont pas les parties réelles et imaginiaires de* $\exp(iz)$.
2. On définit aussi les fonctions cosh *et* sinh *par* $\cosh(z) = \frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2}$ *et* $\sinh(z) = \frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2}$. *Par définition on a alors* $\cos(z) = \cosh(iz)$ *et* $\sin(z) = -i\sinh(iz)$. *Les fonctions* cos *et* cosh *sont paires tandis que les fonctions* sin *et* sinh *sont impaires.*

Dans cette section on va établir un certain nombre de propriétés de la fonction exponentielle, et leur lien avec les fonctions cosinus et sinus, en n'utilisant que les Définitions 3.5 et 3.6 et cela sans rien présupposé de connu sur ces fonctions y compris lorsque $z = x$ est réel. On ne suppose pas non plus avoir connaissance du nombre π que l'on va construire à l'occasion. On montrera plus loin, voir la Remarque 5.2, que cette définition coincide bien avec celle usuelle reliant le rayon d'un cercle et son périmètre.

Théorème 3.1. *La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\exp(0) = 1$.
2. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a* $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$.
3. *Pour tous* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *on a* $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.
4. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a* $\exp(z) \neq 0$ *et* $\frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$.
5. *La fonction* exp *est holomorphe et vérifie* $\exp'(z) = \exp(z)$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$. *De même les fonctions* cos *et* sin *sont holomorphes sur* $\mathbb{C}$ *et vérifient* $\cos'(z) = -\sin(z)$ *et* $\sin'(z) = \cos(z)$.
6. *La restriction de* exp *à* $\mathbb{R}$ *définit une bijection strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *dans* $]0, +\infty[$.
7. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a* $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$. *En particulier* $|\exp(z)| = 1$ *si et seulement si* $z = it \in i\mathbb{R}$ *et pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *on a alors* $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.
8. *Il existe un unique réel positif, noté* π, *tel que* $\mathrm{e}^{i\pi/2} = i$ *et tel que* $\mathrm{e}^z = 1$ *si et seulement si* $z \in 2i\pi\mathbb{Z}$, *i.e.* $z = 2in\pi$ *avec* $n \in \mathbb{Z}$. *On a alors* $\exp(i\pi) = -1$.
9. *La fonction* exp *est périodique de période* $2i\pi$. *Par conséquent les fonctions* cos *et* sin *sont périodiques de période* 2π.
10. *La fonction* $t \mapsto \exp(it)$ *est surjective de* $\mathbb{R}$ *dans l'ensemble* $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$. *Pour tout* $z \in \mathbb{U}$ *il existe un unique* $t \in [0, 2\pi[$ *tel que* $z = \exp(it)$ *et pour tout* $t' \in \mathbb{R}$ *on a* $z = \exp(it')$ *si et seulement si il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $t' = t + 2k\pi$.
11. *La fonction* exp *est surjective de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}^*$.

La suite de cette section est consacrée à démontrer ce théorème.

La propriété 1. est immédiate par définition. Les propriétés de la conjugaison assurent que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a $\overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{N} \frac{\bar{z}^n}{n!}$ et la propriété 2. découle alors de la continuité de la fonction $z \mapsto \bar{z}$:

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \lim_{N\to\infty} \overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{\bar{z}^n}{n!} = \exp(\bar{z}).$$

La propriété 3. utilise la Proposition 3.9. Soient $\alpha_n = \frac{z_1^n}{n!}$ et $\beta_n = \frac{z_2^n}{n!}$. Ces séries convergent absolument donc on a $\exp(z_1)\exp(z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n$ où

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} = \frac{(z_1+z_2)^n}{n!},$$

i.e. $\exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1+z_2)$. En prenant alors $z_1 = z = -z_2$ on obtient $\exp(z)\exp(-z) = \exp(z-z) = \exp(0) = 1$ ce qui prouve la propriété 4.

La propriété 5. découle directement de la Proposition 3.11. En particulier on a montré que $\exp(0) = 1$ et $\exp'(x) = \exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On retrouve ainsi bien la définition de la fonction exponentielle que vous avez vue en terminale (et dont vous avez jusque là admis l'existence !).

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après 5. et vérifie

$$\exp'(x) = \exp(x) = \exp(x/2)\exp(x/2) > 0$$

puisque $\exp(x/2) \in \mathbb{R}^*$. La fonction exponentielle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Il reste à montrer que $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$. Pour tout $x > 0$ la série définissant la fonction exponentielle est à termes positifs donc $\exp(x) \geq 1 + x$ (sa somme partielle pour $n = 1$) ce qui prouve que $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$. En utilisant $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$ on en déduit la limite en $-\infty$. Cela prouve la propriété 6.

Remarque 3.9. *Pour $x > 0$, toujours en utilisant que la fonction exponentielle est la somme d'une série à termes positifs on peut écrire $\exp(x) \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ et donc $\frac{\exp(x)}{x^n} \geq \frac{x}{(n+1)!}$. On montre ainsi les croissances comparées $\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$ pour tout entier n.*

Par définition $|\exp(z)|^2 = \exp(z)\overline{\exp(z)}$. En utilisant 2. et 3. on a donc $|\exp(z)|^2 = \exp(z)\exp(\bar{z}) = \exp(z+\bar{z}) = \exp(2\mathrm{Re}(z)) = (\exp(\mathrm{Re}(z)))^2$. Comme $|\exp(z)|$ et $\exp(\mathrm{Re}(z))$ sont strictement positifs on a bien $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$ et donc $|\exp(z)| = 1$ si et seulement si $\exp(\mathrm{Re}(z)) = 1$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$ puisque exp est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$ d'après 6. Finalement, si $t \in \mathbb{R}$ on a vu que $\cos(t) = \mathrm{Re}(\exp(it))$ et $\sin(t) = \mathrm{Im}(\exp(it))$ donc $1 = |\exp(it)|^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t)$. Cela prouve la propriété 7.

Pour montrer 8. on va utiliser les fonctions cos et sin sur $\mathbb{R}$. On aura pour cela besoin du lemme suivant.

Lemme 3.1. *Soit $(a_n)_n$ une suite (réelle) décroissante qui tend vers 0 et $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles de la série alternée $\sum(-1)^n a_n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_{2n+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n \leq S_{2n}$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$. La suite $(S_{2n})_n$ est donc décroissante et converge vers $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, on a donc nécessairement $S_{2n} \geq \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$. L'autre inégalité s'obtient de façon similaire en montrant que la suite $(S_{2n+1})_n$ est décroissante. □

On va maintenant considérer la fonction cos sur l'intervalle $[0,2]$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\cos(t) = 1 - \dfrac{t^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$. En particulier $\cos(2) = -1 + \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}$. On a une série alternée avec $a_n = \frac{4^n}{(2n)!}$. On vérifie bien que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{(2n+2)(2n+1)} \leq 1$ pour tout $n \geq 2$ (la suite a_n n'est pas décroissante à partir de $n = 0$ c'est pour cela qu'on a isolé les deux premiers termes). D'après le lemme on a donc $\cos(2) \leq -1 + \dfrac{(-1)^2 2^4}{4!} = -\dfrac{1}{3} < 0$. On montre maintenant que cos est strictement décroissante sur $[0,2]$. D'après 5. la fonction cos est dérivable et vérifie $\cos'(t) = -\sin(t)$. On va à nouveau utiliser le lemme, cette fois à la fonction sin. On a bien une série alternée avec cette fois $a_n = \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Si $t \in [0,2]$ on a bien $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{t^2}{(2n+3)(2n+2)} \leq \frac{4}{6} < 1$, et donc

$$\sin(t) \;\geq\; \sum_{n=0}^{1}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \;=\; t - \frac{t^3}{6} \;=\; \frac{t}{6}(6 - t^2) > 0, \qquad \forall t \in]0,2].$$

La fonction cos est donc continue strictement décroissante sur $[0,2]$ et vérifie $\cos(0) = 1 > 0$ (par définition de cos à l'aide de la série entière !) et $\cos(2) < 0$. Il existe donc un unique $t_0 \in]0,2[$ tel que $\cos(t_0) = 0$. On pose $\pi = 2t_0$. On a alors $\sin^2(\pi/2) = 1 - \cos^2(\pi/2) = 1$ et comme $\sin(t) > 0$ sur $]0,2]$ et que $\pi/2 \in]0,2]$ on en déduit que $\sin(\pi/2) = 1$. Finalement $\exp(i\pi/2) = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$. On a alors, en utilisant 3., $\exp(i\pi) = \exp(i\pi/2)\exp(i\pi/2) = i^2 = -1$ et de même $\exp(2i\pi) = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient facilement par récurrence que $\exp(2in\pi) = 1$ et le résultat reste vrai pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ en utilisant 2. avec $z = 2in\pi$.

Il reste à montrer que si $\exp(z) = 1$ alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 2in\pi$. Soit donc un tel $z = x + iy$. Puisque $\exp(z) = 1$ est de module 1, d'après 7. on a $x = 0$. Soit maintenant n la partie entière du nombre réel $\frac{y}{2\pi}$ et $t = y - 2n\pi$. On va montrer que $t = 0$ ce qui prouvera que $z = iy \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Par définition de la partie entière on a $t \in [0, 2\pi[$ et $\exp(it) = \exp(iy - i2n\pi) = \exp(iy)\exp(-i2n\pi) = 1$. On considère alors le nombre complexe $\exp(it/4)$ mis sous forme algébrique, i.e. $\exp(it/4) = u + iv$ avec $u = \cos(\frac{t}{4})$ et $v = \sin(\frac{t}{4})$. Comme $t/4 \in [0, \pi/2[$ l'étude des fonctions cos et sin effectuée ci-dessus montre que $0 < u \leq 1$ et $0 \leq v < 1$ avec $u = 1$ et $v = 0$ si et seulement si $t = 0$. D'autre part en utilisant 3. on a

$$1 = \exp(it) = (\exp(it/4))^4 = (u+iv)^4 = u^4 + v^4 - 6u^2v^2 + 4i(u^3v - uv^3),$$

donc $1 = u^4 + v^4 - 6u^2v^2$ et $0 = uv(u^2 - v^2)$. Si $v \neq 0$ la seconde égalité donne $u^2 - v^2 = 0$ et donc $u = v$ (u et v sont tous les deux positifs). Mais alors $u^4 + v^4 - 6u^2v^2 = -4u^2$ ne peut pas être égal à 1. Ainsi $v = 0$ donc $u = 1$ et on a bien $t = 0$. Cela finit la preuve de 8.

La périodicité de la fonction exponentielle découle directement de 3. et $\exp(2i\pi) = 1$.

On montre maintenant que la fonction $t \mapsto \exp(it)$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$. Soit donc $z \in \mathbb{U}$, on veut montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z = \exp(it)$. Si $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$ sont positifs, comme $x^2 + y^2 = 1$ on a $0 \leq x \leq 1$ donc en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction cos sur $[0, \pi/2]$ il existe $t \in [0, \pi/2]$ tel que $x = \cos(t)$. On a alors $y^2 = 1 - x^2 = 1 - \cos^2(t) = \sin^2(t)$ et comme y et $\sin(t)$ sont positifs (y par hypothèse et $\sin(t)$ d'après l'étude précédente) on a $y = \sin(t)$. Finalement on a bien $z = x + iy = \exp(it)$. Si x est positif et y est négatif on applique ce qui précède à $\bar{z} = x - iy$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{z} = \exp(it)$ et donc $z = \overline{\exp(it)} = \exp(\overline{it}) = \exp(-it)$. Le résultat est donc vrai pour tout z de partie réelle positive. Finalement si $x = \mathrm{Re}(z) < 0$ on applique ce qui précède à $-z$. Il existe donc t tel que $-z = \exp(it)$ et donc $z = -\exp(it) = \exp(i\pi)\exp(it) = \exp(i(t+\pi))$. La fonction $t \mapsto \exp(it)$ est donc bien surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.

Par ailleurs, si $t, t' \in \mathbb{R}$ sont tels que $z = \exp(it) = \exp(it')$ alors d'après 3. on a $\exp(i(t' - t)) = 1$ et donc d'après 8. il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $t' = t + 2n\pi$. De plus, si $z \in \mathbb{U}$ et t' vérifie $z = \exp(it')$ alors en prenant n la partie entière de $\frac{t'}{2\pi}$ et $t = t' - 2n\pi$ on a bien $t \in [0, 2\pi[$ et $\exp(it) = \exp(it')\exp(-2in\pi) = z$. Enfin si $t, t' \in [0, 2\pi[$ sont tels que $\exp(it) = \exp(it')$ on a $t' - t \in]-2\pi, 2\pi[$ et $t' - t \in 2\pi\mathbb{Z}$ donc nécessairement $t' - t = 0$, i.e. $t = t'$.La propriété 10. est donc bien démontrée.

Il reste finalement à montrer que exp est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$. Soit $w \in \mathbb{C}^*$ on cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $\exp(z) = w$. On a $\frac{w}{|w|} \in \mathbb{U}$ donc d'après 10. il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{w}{|w|} = \exp(iy)$, i.e. $w = |w|\exp(iy)$. Mais $|w| \in]0, +\infty[$ donc d'après 6. il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(x) = |w|$ et ainsi $w = |w|\exp(iy) = \exp(x)\exp(iy) = \exp(x + iy)$ ce qui prouve que exp est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.

Définition 3.7. *Si $z \in \mathbb{C}^*$ alors $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$. Tout nombre $t \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = \exp(it)$ est appelé un argument de z.*

La propriété 10. assure qu'un tel argument existe bien et qu'il est défini à addition d'un multiple de 2π près. Ainsi étant donné n'importe quel intervalle I semi-ouvert de longueur 2π, i.e. de la forme $I = [a, a + 2\pi[$ ou $I =]a, a + 2\pi]$, tout nombre complexe non nul admet un unique argument dans I.

3.4 Logarithme complexe

Comme dans $\mathbb{R}$ il s'agit d'*inverser* la fonction exponentielle, i.e. trouver une fonction f telle que $\exp(f(z)) = z$. D'une part on a vu que exp ne s'annulait pas, il va donc falloir au moins restreindre l'ensemble de définition d'un éventuel logarithme à $\mathbb{C}^*$. D'autre part, et c'est le plus gros problème, la fonction exp n'est pas injective ! On sait cependant de quelle façon elle n'est pas injective. En effet, $\exp(w_1) = \exp(w_2)$ si et seulement $\exp(w_1 - w_2) = 1$ et donc si et seulement si $w_1 - w_2 \in 2i\pi\mathbb{Z}$ (c'est le 8. du Théorème 3.1). En d'autres termes si $f(z)$ est un "logarithme" de z alors tout nombre de la forme $f(z) + 2in\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, en est également un (et ils sont tous de cette forme là).

Plus précisément, si $z \neq 0$ et si on écrit $z = |z|\exp(i\arg(z))$ où $\arg(z)$ est un argument de z (n'importe lequel) alors

$$\exp(f(z)) = z \iff \exp(f(z)) = |z|\exp(i\arg(z)) \iff \exp(f(z)) = \exp\big(\ln(|z|) + i\arg(z)\big)$$

où ln est, comme d'habitude, la bijection réciproque de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ (la fonction ln est bien définie d'après le 6. du Théorème 3.1). On a donc envie d'écrire $f(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$ et on retrouve le fait que le logarithme de z n'est défini qu'à l'addition d'un multiple entier de $2i\pi$ près puisque l'argument n'est défini qu'à l'addition d'un multiple entier de 2π près.

Définition 3.8. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert. On dit que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une détermination du logarithme sur Ω si f est continue et vérifie $\exp(f(z)) = z$ pour tout $z \in \Omega$.*

Avec ce qu'on a dit ci-dessus, si une détermination du logarithme existe sur Ω elle n'est pas unique puisqu'on peut lui ajouter un multiple entier de $2i\pi$. C'est en fait essentiellement la seule possibilité. On rappelle qu'un domaine Ω est un ouvert connexe par arcs.

Proposition 3.13. *Si Ω est un domaine de $\mathbb{C}$ et si f et g sont deux déterminations du logarithme sur Ω alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f(z) = g(z) + 2ik\pi$ pour tout $z \in \Omega$.*

Démonstration. Pour tout $z \in \Omega$ on a $\exp(f(z)) = z = \exp(g(z))$ donc $\exp(f(z) - g(z)) = 1$. D'après le Théorème 3.1, pour tout $z \in \Omega$ il existe $k(z) \in \mathbb{Z}$ tel que $f(z) - g(z) = 2ik(z)\pi$ et comme les fonctions f et g sont continues la fonction $k : \Omega \ni z \mapsto k(z) \in \mathbb{Z}$ est aussi continue. On veut montrer qu'elle est constante.

Soient $z_1, z_2 \in \Omega$, il faut montrer que $k(z_1) = k(z_2)$. Comme Ω est connexe par arcs il existe une fonction continue $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ telle que $\gamma(a) = z_1$, $\gamma(b) = z_2$ et $\gamma(t) \in \Omega$ pour tout t. La fonction $\varphi = k \circ \gamma : t \mapsto k(\gamma(t))$ est donc une fonction continue sur $[a, b]$ (composée de fonctions continues) à valeurs dans $\mathbb{R}$, et même dans $\mathbb{Z}$. En particulier elle vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. Si $\varphi(a) = k(z_1) \neq k(z_2) = \varphi(b)$ la fonction φ prendrait toutes les valeurs comprises entre $k(z_1)$ et $k(z_2)$ y compris donc des valeurs non entières. C'est impossible. $\square$

Dans l'idéal on aimerait prendre Ω le plus grand possible, et donc $\Omega = \mathbb{C}^*$. On va voir que ce n'est pas possible, i.e. il n'existe pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

Proposition 3.14. *Si Ω est un ouvert contenant $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ alors il n'existe pas de détermination du logarithme sur Ω. En particulier il n'existe pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'on ait une détermination du logarithme f sur Ω. Comme $\mathbb{U} \subset \Omega$ on peut définir la fonction $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ par $g(t) = f(\exp(it))$. En particulier on a $g(2\pi) = f(\exp(2i\pi)) = f(\exp(0)) = g(0)$. Par ailleurs, comme f est une détermination du logarithme on doit avoir $\exp(g(t)) = \exp\big(f(\exp(it))\big) = \exp(it)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Donc pour tout $t \in [0, 2\pi]$ il existe $k(t) \in \mathbb{Z}$ tel que $g(t) = it + 2ik(t)\pi$. Comme la fonction g est continue la fonction $k(t)$ aussi et elle est donc constante (c'est le même argument que celui utilisé dans la Proposition 3.13). Ainsi $g(0) = 2ik\pi$ tandis que $g(2\pi) = 2i(k+1)\pi$. Cela contredit $g(0) = g(2\pi)$. $\square$

Remarque 3.10. *La proposition ci-dessus est en fait plus générale. On peut voir dans la preuve que ce qui pose problème est le fait d'avoir fait tout un tour autour de 0. Si Ω est un ouvert contenant un chemin fermé "entourant" l'origine on ne pourra pas trouver de détermination du logarithme sur Ω. Pour espérer trouver une détermination du logarithme il faut "couper" $\mathbb{C}$ de façon à ne pas pouvoir faire un tel tour.*

Définition-Proposition 3.9. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\Omega_\theta = \mathbb{C} \setminus e^{i\theta}\mathbb{R}_+ = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \forall r \geq 0,\, z \neq r\exp(i\theta)\}$. Alors la fonction exponentielle est bijective de $\{x+iy \in \mathbb{C} \,|\, x \in \mathbb{R},\ y \in]\theta, \theta+2\pi[\}$ dans Ω_θ. Sa bijection réciproque f_θ est une détermination du logarithme sur Ω_θ. Elle est donnée par $f_\theta(z) = \ln(|z|) + i\arg_\theta(z)$ où $\arg_\theta(z)$ est l'unique argument de z dans l'intervalle $]\theta, \theta + 2\pi[$.*

Si on prend $\theta = -\pi$ on parle de détermination principale du logarithme et on la note Log. Sa restriction à $]0, +\infty[$ coincide avec le logarithme népérien.

Dans $\mathbb{R}$ il y a deux façons d'aborder la fonction logarithme népérien : comme réciproque de la fonction exponentielle (c'est l'approche qu'on a suivi ici) ou bien comme primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. On a en fait l'analogue dans $\mathbb{C}$.

Proposition 3.15. *Soit Ω un domaine inclus dans $\mathbb{C}^*$.*

1. *Si f est une détermination du logarithme sur Ω alors f est holomorphe sur Ω et vérifie $f'(z) = \frac{1}{z}$ pour tout $z \in \Omega$.*
2. *Si f est une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z}$ sur Ω alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) - \alpha$ est une détermination du logarithme sur Ω.*

Remarque 3.11. *En utilisant la Proposition 3.14 on en déduit en particulier que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$ bien qu'elle y soit continue et même infiniment dérivable. Par contre elle en a sur les domaines $\Omega_\theta = \mathbb{C} \setminus e^{i\theta}\mathbb{R}_+$.*

Démonstration. 1. Soit f une détermination du logarithme sur Ω et $z_0 \in \Omega$. Pour tout $z \in \Omega$ on a $\exp(f(z)) = z$ et donc en particulier $f(z) \neq f(z_0)$ si $z \neq z_0$ (sinon on aurait $\exp(f(z)) = \exp(f(z_0))$. De plus la fonction f est continue donc, par composition de limites et puisque $\exp' = \exp$ on a, pour tout $z \neq z_0$,

$$\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{\exp(f(z)) - \exp(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} \exp'(f(z_0)) = \exp(f(z_0)) = z_0.$$

Puisque $z_0 \neq 0$ on en déduit que $\displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z_0}$ ce qui prouve que f est dérivable en z_0 avec $f'(z_0) = \frac{1}{z_0}$.

2. Soit f une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z}$ sur Ω. En particulier la fonction f est holomorphe avec $f'(z) = \frac{1}{z}$ donc la fonction définie sur Ω par $g(z) = \frac{\exp(f(z))}{z}$ est holomorphe sur Ω ($0 \notin \Omega$) et vérifie

$$g'(z) = \frac{zf'(z)\exp(f(z)) - \exp(f(z))}{z^2} = 0.$$

Comme Ω est connexe par arcs on peut utiliser la Proposition 2.13 ce qui prouve que g est constante. On note κ sa valeur. Pour tout $z \in \Omega$ on a donc $\exp(f(z)) = \kappa z$. Comme exp ne s'annule pas on a nécessairement $\kappa \in \mathbb{C}^*$ et donc, d'après le Théorème 3.1, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\kappa = \exp(\alpha)$. Ainsi pour tout $z \in \Omega$ on a $\exp(f(z)) = \exp(\alpha)z \Leftrightarrow \exp(f(z) - \alpha) = z$. La fonction $f(z) - \alpha$ est donc bien une détermination du logarithme. □

On termine cette section sur le logarithme en faisant le lien avec les séries entières.

Proposition 3.16. *La série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$ a pour rayon de convergence 1 et pour tout $z \in D(1,1)$ on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n = \mathrm{Log}(z)$ la détermination principale du logarithme.*

Démonstration. Le rayon de convergence de la série entière s'obtient facilement avec la règle de D'Alembert. Si on note $f(z)$ la somme de cette série la fonction f est donc holomorphe dans $D(1,1)$ et pour tout $z \in D(1,1)$, i.e. tel que $|z-1| < 1$ on a

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \times n(z-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (1-z)^{n-1} \overset{|z-1|<1}{=} \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z}.$$

La fonction f est donc une primitive de $\frac{1}{z}$ sur $D(1,1)$. C'est donc une détermination du logarithme sur $D(1,1)$. Comme la fonction Log est aussi une telle détermination sur le domaine $D(1,1)$, d'après la Proposition 3.13 il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f(z) = \mathrm{Log}(z) + 2ik\pi$ pour tout $z \in D(1,1)$. Or $f(1) = 0 = \mathrm{Log}(1)$ donc $k = 0$ et $f(z) = \mathrm{Log}(z)$ pour tout $z \in D(1,1)$. $\square$

Remarque 3.12. *Attention, la fonction* Log *est définie sur* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ *mais n'est égal à* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$ *que si* $z \in D(1,1)$. *Une telle situation arrive souvent. Pensez par exemple à la fonction* $g(z) = \frac{1}{1-z}$ *qui est définie sur* $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ *mais qui ne coincide avec la série entière* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *que si* $|z| < 1$ *(si* $|z| \geq 1$ *la série diverge de toutes façons).*

CHAPITRE 4

FONCTIONS ANALYTIQUES

4.1 Séries entières et fonctions analytiques

Définition 4.1. *Soit Ω un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. On dit que f est développable en série entière en z_0, noté* DSE *en z_0 s'il existe une série entière $\sum a_n(z-z_0)^n$ de rayon de convergence non nul et tel qu'il existe $r > 0$ tel que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ sur $D(z_0, r)$.*

La proposition suivante découle directement de ce qu'on a vu sur les séries entières, voir la Section 3.2.

Proposition 4.1. *Si : $\Omega \to \mathbb{C}$ est* DSE *en z_0 alors il existe $r > 0$ tel que f est C^∞ sur $D(z_0, r)$ et pour tout $z \in D(z_0, r)$ on a*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n. \tag{4.1}$$

En particulier, s'il existe le DSE en z_0 est unique.

Exemple 4.1. *Une fonction polynomiale P est DSE en tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et si $n = \deg(P)$ alors $P(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$.*

Exemple 4.2. *La fonction f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $f(z) = \frac{1}{1-z}$ est* DSE *en $z_0 = 0$. Pour tout $z \in D(0,1)$ on a en effet $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.*

Définition 4.2. *Soit Ω un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que f est* analytique *sur Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$ la fonction f est* DSE *en z_0.*

Les deux propositions qui suivent découlent directement de ce qu'on a fait sur les séries entières.

Proposition 4.2. *Soit $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ analytiques et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors les fonctions $f + \lambda g$ et fg sont analytiques sur Ω.*

Proposition 4.3. *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est analytique alors elle est infiniment dérivable et pour tout k sa dérivée $f^{(k)}$ est analytique.*

Exercice 4.1. *Démontrez ces deux propositions.*

Les fonctions polynômiales sont évidemment analytiques sur $\mathbb{C}$ tout entier. On montrera dans la Section 4.3 que toutes les fonctions de classe C^1 sont analytiques sur leur ensemble de définition, et de même pour toutes les fonctions dérivables (voir le Chapitre 5). On donne ici un exemple simple mais instructif quant aux manipulations sur les séries entières que l'on sera amenées à faire par la suite.

Exemple 4.3. *La fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \frac{1}{z}$ est analytique. On va utiliser simplement la convergence de la série géométrique, voir l'Exemple 4.2 ci-dessus. Soit $z_0 \neq 0$. On voudrait écrire, au voisinage de z_0, f sous la forme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. On va donc naturellement cherchez à faire apparaitre $z - z_0$. On écrit $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0 + z_0} = \dfrac{1}{z_0} \times \dfrac{1}{1 + \frac{z - z_0}{z_0}}$. Si $\left|\dfrac{z - z_0}{z_0}\right| < 1$, i.e. si $z \in D(z_0, |z_0|)$, on a alors*

$$f(z) = \frac{1}{z_0} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z - z_0}{z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z - z_0)^n$$

La fonction f est donc DSE en z_0. Comme c'est vrai pour tout $z_0 \neq 0$ cela prouve bien que f est analytique sur $\mathbb{C}^*$.

4.2 Zéros isolés et prolongement analytique

Proposition 4.4. *Soit Ω un domaine et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytique. S'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors f est nulle.*

Remarque 4.1. *1. Un tel résultat est faux si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est C^∞, sans supposer qu'elle est analytique. Vous pouvez montrer que la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cependant f n'est pas nulle. Vous pouvez également vérifier qu'elle n'est pas DSE en 0, et donc pas analytique.*
2. Si on suppose que $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \geq 1$ alors en considérant $g(z) = f(z) - f(z_0)$ on en déduit que f est constante. Plus généralement si on suppose que $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \geq N$ alors en considérant $g(z) = f(z) - \sum_{n=0}^{N} \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ on en déduit que f est un polynôme de degré au plus N.

Remarque 4.2. *On peut avoir l'impression que demander à toutes les dérivées en un point d'être nulles est condition forte. On peut voir cela autrement. Si f est analytique sur un domaine Ω et est nulle sur un ouvert non-vide $\Omega_0 \subset \Omega$, même si Ω_0 est "minuscule", alors f*

est nulle partout ! En effet soit Ω_0 un tel ouvert et $z_0 \in \Omega_0$. Comme f est nulle sur tout Ω_0 toutes ses dérivées sont nulles sur Ω_0 (dérivées de la fonction constante égale à 0 sur Ω_0). En particulier $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc f est nulle.

Démonstration. Soit $Z = \{z \in \Omega \,|\, f^{(n)}(z) = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$. On va montrer que $Z = \Omega$ ce qui prouvera en particulier que $f(z) = 0$ pour tout $z \in \Omega$.

On commence par montrer que l'ensemble Z possède les deux propriétés suivantes :

1. Z est ouvert,
2. Si $(z_k)_k$ est une suite d'éléments de Z telle que $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z \in \Omega$ alors $z \in Z$. On dit que Z est un fermé de Ω (on a supposé que la limite était au moins dans Ω).

1. f est analytique donc pour tout $z_1 \in \Omega$ il existe $r > 0$ tel que sur $D(z_1, r)$ on a $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!}(z - z_1)^n$. Si $z_1 \in Z$ la fonction f est donc constante égale à zéro sur $D(z_1, r)$ et donc $D(z_1, r) \subset Z$. L'ensemble Z est bien ouvert.
2. Soit $(z_k)_k$ dans Z telle que $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z \in \Omega$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a donc $f^{(n)}(z_k) = 0$ pour tout k et comme $f^{(n)}$ est continue sur Ω (puisqu'elle est dérivable) on en déduit que $f^{(n)}(z) = \lim\limits_{k\to\infty} f^{(n)}(z_k) = 0$ (c'est ici qu'on utilise l'hypothèse $z \in \Omega$). C'est vrai pour tout n donc $z \in Z$.

On veut maintenant montrer que $Z = \Omega$. Par hypothèse il existe $z_0 \in Z$. Soit $z_1 \in \Omega$, on montre que $z_1 \in Z$. Comme Ω est un domaine il existe $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ continue tel que $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z_1$ et $\gamma(t) \in \Omega$ pour tout $t \in [0, 1]$. On considère $J = \{t \in [0, 1] \,|\, \gamma(t) \in Z\}$. On va montrer que $1 \in J$ et donc que $z_1 = \gamma(1) \in Z$. L'ensemble J est borné (il est inclus dans $[0, 1]$) et non-vide puisque $0 \in J$. Il admet donc une borne supérieure T. Par définition de la borne supérieure il existe $(t_k)_k \in J^{\mathbb{N}}$ telle que $t_k \to T$. Par définition de J pour tout k on a $z_k = \gamma(t_k) \in Z$ et par continuité de γ on a $z_k \to \gamma(T) = z \in \Omega$. La propriété 2. ci-dessus prouve que $z \in Z$ et donc $T \in J$. Montrons enfin que $T = 1$. Par la propriété 1. Z est ouvert donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $D(z, \varepsilon) \subset Z$. Puisque γ est continue il existe $\delta > 0$ tel que si $|t - T| < \delta$ alors $|\gamma(t) - z| = |\gamma(t) - \gamma(T)| < \varepsilon$ et donc $\gamma(t) \in Z$. Autrement dit $]T - \delta, T + \delta[\cap [0, 1] \subset J$. Si $T < 1$ cela contredit la définition de $T = \sup J$. □

Remarque 4.3. *Ce qu'on a montré ci-dessus est qu'en fait si Ω est connexe par arcs alors un sous-ensemble non-vide de Ω (ici l'ensemble Z) qui est à la fois ouvert et fermé dans Ω est égal à Ω tout entier. Un ensemble qui vérifie cette propriété est dit connexe et on a donc montré que si Ω est connexe par arcs alors Ω est connexe. Dans la plupart des livres on trouve en fait comme définition d'un domaine que c'est un ouvert connexe. On peut cependant montrer que dans $\mathbb{C}$ si Ω est un ouvert connexe alors il est connexe par arcs, i.e. pour les ouverts de $\mathbb{C}$ les deux notions de connexe et connexe par arcs coincident. La notion d'ensemble connexe par arcs est cependant plus intuitive que celle de connexe, c'est pour ça qu'on l'a choisie dans la définition d'un domaine.*

Théorème 4.1. *[Principe des zéros isolés] Soit Ω un domaine et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique non-nulle. Alors l'ensemble $Z(f) := \{z \in \Omega \,|\, f(z) = 0\}$ des zéros de f est un ensemble discret, i.e. pour tout $z_0 \in Z(f)$ il existe $r > 0$ tel que $Z(f) \cap D(z_0, r) = \{z_0\}$, i.e. pour tout $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ on a $f(z) \neq 0$.*

Démonstration. On suppose que f n'est pas nulle. Soit $z_0 \in Z(f)$. D'après la proposition précédente il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ (sinon f serait nulle). Soit $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$. Comme f est DSE en z_0 il existe $R > 0$ tel que pour tout $z \in D(z_0, R)$ on a

$$f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = (z-z_0)^{n_0}\left[\frac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-n_0}\right]. \quad (4.2)$$

Le terme entre crochets est la somme d'une série entière sur $D(z_0, R)$. Sa somme $g(z)$ est donc continue, en particulier $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = g(z_0) = \dfrac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} \neq 0$. Donc il existe $0 < r < R$ tel que g ne s'annule pas sur $D(z_0, r)$. Comme $(z-z_0)^{n_0}$ ne peut s'annuler qu'en z_0 on en déduit que pour tout $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ on a $f(z) \neq 0$. □

Comme le montre la preuve ce qui est important est que f soit analytique, pas qu'elle soit définie sur $\mathbb{C}$. On peut définir de façon analogue la notion de fonction analytique pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et le résultat reste vrai. Par contre si on suppose seulement que f est C^∞ le résultat n'est plus vrai.

Remarque 4.4. *L'équation (4.2) montre que si f est analytique non nulle alors pour tout zéro z_0 de f il existe $n_0 \geq 1$ tel que $f(z) = (z-z_0)^{n_0} g(z)$ avec $g(z_0) \neq 0$. Par analogie avec les polynômes on a la définition suivante.*

Définition 4.3. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ non nulle et $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = 0$. Le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ est appelé l'ordre de z_0.*

Exercice 4.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$. Montrer que f est C^∞. Quel est l'ensemble des zéros de f ? Comparez également ce qui se passe ici avec le résultat de la Proposition 4.4.*

Corollaire 4.1. *Soit Ω un domaine et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique non-nulle. Pour tout ensemble compact $K \subset \Omega$ la fonction f admet un nombre fini de zéros dans K. Par conséquent l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est au plus dénombrable.*

Démonstration. Voir TD. □

Corollaire 4.2. *Soit Ω un domaine et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ l'ensemble $f^{-1}(\{\alpha\}) = \{z \in \Omega \,|\, f(z) = \alpha\}$ est soit discret soit égal à Ω.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On considère la fonction $g(z) = f(z) - \alpha$. Si $f^{-1}(\{\alpha\}) \neq \Omega$ la fonction g est analytique non-nulle donc l'ensemble $Z(g)$ de ses zéros est un ensemble discret. Mais on a $Z(g) = f^{-1}(\{\alpha\})$. □

Corollaire 4.3. *Soit Ω un domaine et $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ deux fonctions analytiques. Si l'ensemble $A = \{z \in \Omega \,|\, f(z) = g(z)\}$ admet un point d'accumulation dans Ω alors $f = g$.*

Démonstration. La fonction $f - g$ est analytique et $A = Z(f-g)$. Si A admet un point d'accumulation, par continuité de $f - g$ celui-ci est dans A. Ainsi $A = Z(f-g)$ n'est pas discret et donc $A = \Omega$, i.e. $f - g = 0$. □

Théorème 4.2. *[Principe du prolongement analytique] Soit Ω un domaine, $\Omega_0 \subset \Omega$ un ouvert non-vide et $f : \Omega_0 \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Alors f admet au plus un prolongement analytique sur Ω, i.e. si $f_1, f_2 : \Omega \to \mathbb{C}$ sont analytiques telles que pour tout $z \in \Omega_0$ on a $f_1(z) = f_2(z) = f(z)$ alors $f_1 = f_2$.*

Démonstration. Si f_1, f_2 sont deux prolongements de f alors $A = \{z \in \Omega \,|\, f_1(z) = f_2(z)\}$ contient Ω_0 et a donc un point d'accumulation (voir l'Exercice 2.4). Cela prouve que $f_1 = f_2$.

4.3 Analyticité des fonctions C^1

On va établir ici qu'une fonction C^1, i.e. holomorphe avec f' continue, est automatiquement analytique et donc en particulier C^∞. On verra dans le chapitre suivant que la continuité de f' est en fait automatique dès que f est dérivable et donc que toute fonction holomorphe est analytique. Cela nécessitera des outils supplémentaires, intégrale le long d'un chemin par exemple. Le cas des fonctions C^1 est beaucoup plus simple et on va pouvoir déjà tirer beaucoup de conséquences rien qu'avec cette hypothèse C^1. Cette section sera également l'occasion de faire le lien entre les séries entières et ce qu'on a fait sur les séries de Fourier.

Etant donnée une fonction f de classe C^1, si elle s'écrit comme somme d'une série entière $\sum a_n(z-z_0)^n$ sur un disque $D(z_0, R)$ (c'est ce qu'on veut établir puisqu'on veut montrer qu'elle est analytique) la Proposition 3.12 montre que nécessairement pour tout $r \in]0, R[$ on doit avoir

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{e}^{-int}\, \mathrm{d}t.$$

On va donc naturellement considérer ces quantités. Il va par contre falloir montrer que les c_n ne dépendent en effet pas du choix de r, que la série entière obtenue a un rayon de convergence non nul et enfin qu'elle coincide avec f sur un disque centré en z_0. C'est précisément l'objet du théorème suivant.

Théorème 4.3. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ de classe C^1, $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$. Alors*

1. *pour tout $n \in \mathbb{N}$ le nombre $a_n = \dfrac{1}{2\pi r^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{e}^{-int}\, \mathrm{d}t$ ne dépend pas de $r \in]0, R[$,*
2. *la série entière $\sum a_n(z-z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à R,*
3. *pour tout $z \in D(z_0, R)$ on a $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.*

Par conséquent la fonction f est analytique sur Ω donc C^∞ et pour tout $z_0 \in \Omega$ et tout R tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$ on a

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{e}^{-int}\, \mathrm{d}t, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 < r < R. \tag{4.3}$$

Avant de prouver le théorème on peut tout de suite en déduire que dès que f est C^1, comme elle est analytique, en plus d'être C^∞ elle vérifie les résultats montrés dans la section précédente : principe des zéros isolés et du prolongement analytique. On peut par exemple en déduire une autre preuve de la Proposition 2.13.

Démonstration de le Proposition 2.13. Puisque f' est constante égale à 0 c'est une fonction continue, i.e. f est C^1. La fonction f est donc analytique sur Ω qui est un domaine. Comme f' est nulle toutes les dérivées successives de f sont nulles aussi et la fonction f est donc constante, voir la Remarque 4.2.

Lorsqu'on prend le cas particulier $n=0$ dans (4.3) on obtient également la formule dite de la moyenne.

Corollaire 4.4 (Formule de la moyenne). *Si $f:\Omega\to\mathbb{C}$ est de classe C^1, $z_0\in\Omega$ et $R>0$ tel que $D(z_0,R)\subset\Omega$ alors pour tout $r<R$ on a*

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)\,\mathrm{d}t, \tag{4.4}$$

i.e. la valeur de f au centre du cercle $C(z_0,r)$ est égale à la moyenne des valeurs de f sur le cercle (d'où la terminologie formule de la moyenne).

Démonstration du théorème. On fixe $z_0\in\Omega$ et $R>0$ tel que $D(z_0,R)\subset\Omega$. Un tel R existe puisque Ω est ouvert. Pour tout $r\in]0,R[$ on considère la fonction $g_r(t)=f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)$. La fonction g est 2π-périodique et de classe C^1. C'est la même fonction qu'on a considéré dans la preuve de la Proposition 3.12. La différence est qu'ici on ne sait pas a priori que g_r est la somme d'une série trigonométrique, puisqu'on ne sait pas que f est DSE. L'idée va donc être naturellement de développer g_r, i.e. d'utiliser les séries de Fourier. Les coefficients de Fourier de g_r sont donnés, pour $n\in\mathbb{Z}$, par

$$c_n(r):=c_n(g_r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t. \tag{4.5}$$

On commence par donner l'idée de la preuve. Puisque g est C^1 on peut appliquer le théorème de Dirichlet, i.e.

$$g_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r)\mathrm{e}^{int}.$$

Le 1. consiste à montrer que $c_n(r)=a_nr^n$ où a_n ne dépend pas de r. On montrera ensuite que $a_n=0$ si $n<0$. On aura alors

$$f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)=g_r(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n\mathrm{e}^{int}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(r\mathrm{e}^{it}\right)^n \quad \overset{z=z_0+r\mathrm{e}^{it}}{\Longleftrightarrow} \quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n.$$

1. Soit $n\in\mathbb{Z}$. On veut montrer que $r^{-n}c_n(r)$ ne dépend pas de r sur $]0,R[$, i.e. $c_n(r)$ est de la forme $c_n(r)=a_nr^n$. Comme la fonction f est de classe C^1 la fonction de deux variables $\varphi(r,t):=f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{-int}$ est aussi de classe C^1 (sur $]0,R[\times[0,2\pi]$). Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres garantit que la fonction $c_n(r)$ est de classe C^1 et vérifie

$$c_n'(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{it}f'\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs la fonction g_r est C^1 et on a $g_r'(t)=ir\mathrm{e}^{it}f'\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)$. On constate donc que pour tout $r\in[0,R[$ le coefficient de Fourier de g_r' vaut $c_n(g_r')=irc_n'(r)$. Or, comme g_r est C^1, d'après la Proposition 1.7 on a $c_n(g_r')=inc_n(g_r)$. Ainsi, pour tout $r\in]0,R[$ on a

$c_n'(r) = \frac{n}{r}c_n(r)$. L'équation $y'(r) = \frac{n}{r}y(r)$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les solutions sont de la forme $y(r) = C\mathrm{e}^{n\ln(r)} = Cr^n$ où $C \in \mathbb{C}$ est une constante. Ainsi il existe $a_n \in \mathbb{C}$ tel que $c_n(r) = a_n r^n$ pour tout $r \in]0, R[$.

2. et 3. La fonction f est continue sur $\overline{D}(z_0, \frac{R}{2}) \subset D(z_0, R)$ qui est compact. Donc f est borné sur cet ensemble, i.e. il existe $M \geq 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \overline{D}(z_0, \frac{R}{2})$. Pour tout $r \leq \frac{R}{2}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ on a donc

$$|c_n(r)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{-int}\right|\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\,\mathrm{d}t = M.$$

Si $n < 0$ on a ainsi $|a_n| = \dfrac{|c_n(r)|}{r^n} \leq \dfrac{M}{r^n}$. En faisant tendre r vers 0 on en déduit que $a_n = 0$ (n est négatif !!).

On a ainsi montré que les coefficients de Fourier $c_n(r)$ de la fonction g_r vérifient $c_n(r) = a_n r^n$ avec a_n indépendant de r et $a_n = 0$ si $n < 0$. Comme la fonction g_r est de classe C^1 on peut appliquer le théorème de Dirichlet. Pour tout $r \in]0, R[$ on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$g_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{int},$$

et de plus, d'après le Corollaire 1.2, la convergence est normale, i.e. la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| r^n$ converge. Ceci est vrai pour tout $r < R$, cela assure que la série entière $\sum a_n(z - z_0)^n$ a rayon de convergence au moins égal à R et que si $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on a, en écrivant $z = z_0 + r\mathrm{e}^{it}$,

$$f(z) = f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right) = g_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{int} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Enfin on vérifie que ce développement reste valable en $z = z_0$. En effet, pour tout $r \in]0, R[$ on a, par continuité des intégrales à paramètres,

$$a_0 = \frac{c_0(r)}{r^0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right)\,\mathrm{d}t \overset{r\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0)\,\mathrm{d}t = f(z_0).$$

Finalement la relation (4.3) découle directement de (4.1). □

Remarque 4.5. *Vous avez vu la résolution des équations différentielles de la forme $y'(r) = a(r)y(r)$ pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a utilisé ici que les solutions sont de la même forme alors que la fonction $c_n(r)$ est a priori à valeurs complexes. Cela se montre facilement en séparant parties réelles et imaginaires. Les deux fonctions $\mathrm{Re}(c_n(r))$ et $\mathrm{Im}(c_n(r))$ sont toutes les deux à valeurs réelles et solutions de la même équation $y'(r) = \frac{n}{r}y(r)$. Donc il existe deux constantes réelles C_{Re} et C_{Im} telles que $\mathrm{Re}(c_n(r)) = C_{\mathrm{Re}}r^n$ et $\mathrm{Im}(c_n(r)) = C_{\mathrm{Im}}r^n$ et donc $c_n(r) = Cr^n$ avec $C = C_{\mathrm{Re}} + iC_{\mathrm{Im}}$.*

Remarque 4.6. *La formule (4.3) dit que les coefficients de Fourier de la fonction $g_r(t) = f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right)$ sont donnés, pour $n \geq 0$, par $c_n(g_r) = \dfrac{f^{(n)}(z_0)r^n}{n!}$. Pour $n < 0$ on a vu qu'ils étaient nuls.*

On a montré que la somme et le produit de fonctions analytiques étaient analytiques. On n'a cependant pas parlé du quotient et de la composée. Cela reste bien entendu vrai mais la preuve directement à partir de la définition de fonction analytique n'est pas immédiate à écrire. Avec le théorème précédent ça devient presque évident.

Proposition 4.5. *1. Soient $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ analytiques telles que g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est analytique.*

2. Soient $f : \Omega_f \to \mathbb{C}$ et $g : \Omega_g \to \mathbb{C}$ analytiques et telles que $f(\Omega_f) \subset \Omega_g$. Alors $g \circ f$ est analytique sur Ω_f.

Démonstration. La preuve est la même dans les deux cas. Comme f et g sont analytiques elles sont C^1. Donc $\frac{f}{g}$, resp. $g \circ f$, est C^1 et donc analytique d'après le Théorème 4.3.

Lorsqu'on a une fonction analytique elle est, par définition, DSE en tout point z_0 de son ensemble de définition. Par contre on ne sait rien a priori sur le rayon de convergence du développement en z_0. Le théorème ci-dessus permet de préciser ce rayon.

Proposition 4.6. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Si $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ est tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$ alors le rayon de convergence du DSE en z_0 est au moins égal à R, i.e. (4.1) est vrai sur tout disque $D(z_0, R)$ tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$ et R tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$. Si f est analytique elle est C^1 donc d'après le théorème précédent f est DSE en z_0 avec rayon de convergence au moins égal à R. □

Exemple 4.4. *La fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$. On a vu que son DSE en z_0 avait pour rayon de convergence $|z_0|$. Le disque $D(z_0, |z_0|)$ est bien le plus grand disque centré en z_0 et inclus dans $\mathbb{C}^*$.*

On a vu que pour les fonctions de classe C^1 on pouvait retrouver la valeur de f au centre d'un disque à l'aide des valeurs de f sur le bord du disque, i.e. sur le cercle, c'est la formule de la moyenne. La formule de Cauchy ci-dessous montre qu'en fait on peut obtenir la valeur de f en n'importe quel point du disque à l'aide des valeurs sur le cercle. Autrement dit, les valeurs d'une fonction C^1 sur un cercle déterminent entièrement, et de fa çon "explicite", la fonction à l'intérieur de ce cercle.

Théorème 4.4. *[Formule de Cauchy] Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ de classe C^1, $z_0 \in \Omega$ et R tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$. Alors pour tout $r \in]0, R[$ on a, pour tout $z \in D(z_0, r)$,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + re^{it}\right)}{z_0 + re^{it} - z} re^{it}\, dt. \tag{4.6}$$

Remarque 4.7. *Si on prend $z = z_0$ on retrouve bien entendu la formule de la moyenne.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$, R tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$, $r < R$ et $z \in D(z_0, r)$. D'après le Théorème 4.3 on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) e^{-int}\, dt \right) (z - z_0)^n \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^n} f\left(z_0 + re^{it}\right) e^{-int} (z - z_0)^n\, dt. \end{aligned}$$

La fonction f est continue sur $C(z_0,r)$ donc y est bornée. Il existe donc $M\geq 0$ tel que pour tout $t\in[0,2\pi]$ on a

$$\left|\frac{1}{r^n}f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{-int}(z-z_0)^n\right|\leq M\left|\frac{z-z_0}{r}\right|^n.$$

Comme $z\in D(z_0,r)$ on a $\left|\dfrac{z-z_0}{r}\right|<1$ donc la série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n(t)=\dfrac{1}{r^n}f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{-int}(z-z_0)^n$ converge normalement sur $[0,2\pi]$. On peut donc intervertir série et intégrale, voir la Proposition 3.3 :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)\left(\frac{z-z_0}{r\mathrm{e}^{it}}\right)^n\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)\times\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{r\mathrm{e}^{it}}}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)\times\frac{r\mathrm{e}^{it}}{r\mathrm{e}^{it}-(z-z_0)}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)}{z_0+r\mathrm{e}^{it}-z}r\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

$\square$

Remarque 4.8. *Le membre de droite de (4.6) a un sens tant que $z_0+r\mathrm{e}^{it}-z\neq 0$ pour tout t, i.e. $z\notin C(z_0,r)$. Si $z\in D(z_0,r)$ le théorème affirme qu'il est égal à $f(z)$. Un raisonnement similaire à celui qu'on a fait montre que si $|z-z_0|>r$, i.e. si z est à l'extérieur du cercle $C(z_0,r)$, alors l'intégrale est nulle. En effet si $|z-z_0|>r$ on peut écrire*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)}{z_0+r\mathrm{e}^{it}-z}r\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)\frac{r\mathrm{e}^{it}}{z_0-z}\times\frac{1}{1+\frac{r\mathrm{e}^{it}}{z_0-z}}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)\frac{r\mathrm{e}^{it}}{z_0-z}\left(\frac{r\mathrm{e}^{it}}{z-z_0}\right)^n\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)\left(\frac{r}{z-z_0}\right)^{n+1}\mathrm{e}^{i(n+1)t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Comme $\left|\dfrac{r}{z-z_0}\right|<1$ la série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n(t)=f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)\left(\frac{r}{z-z_0}\right)^{n+1}\mathrm{e}^{i(n+1)t}$ converge normalement sur $[0,2\pi]$ donc en intervertissant série et intégrale on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)}{z_0+r\mathrm{e}^{it}-z}r\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{z-z_0}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{i(n+1)t}\,\mathrm{d}t\right).$$

Mais pour tout n la quantité $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{i(n+1)t}\,\mathrm{d}t$ est le coefficient de Fourier d'indice $-n-1<0$ de la fonction $g_r(t)=f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)$. Cette intégrale est donc nulle pour tout n, voir la Remarque 4.6. Et donc on a bien, pour tout z tel que $|z-z_0|>r$.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)}{z_0+r\mathrm{e}^{it}-z}r\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t=0. \tag{4.7}$$

4.4 Théorème de Liouville et principe du maximum

Proposition 4.7. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ de classe C^1. Alors pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, R tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$ et $0 < r < R$ on a*

$$\sum_{n=0} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right) \right|^2 \mathrm{d}t. \tag{4.8}$$

Démonstration. C'est une application directe du théorème de Parseval à la fonction périodique $g_r(t) = f\left(z_0 + re^{it}\right)$ où on a utilisé que les coefficients de Fourier de g_r étaient nuls pour $n < 0$ et égaux à $\dfrac{f^{(n)}(z_0)r^n}{n!}$ sinon. □

Théorème 4.5 (Liouville)**.** *Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est de classe C^1 et bornée alors f est constante.*

Remarque 4.9. *Ce résultat est totalement faux pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ même si on suppose qu'elles sont analytiques. La fonction* sin : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est analytique et bornée mais n'est pas constante.*

Démonstration. Soit $n \geq 1$. Comme f est C^1 sur $\mathbb{C}$, d'après le Théorème 4.3 appliqué en $z_0 = 0$, pour tout $r > 0$ (on a ici $R = +\infty$) on a

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(r\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{e}^{-int}\, \mathrm{d}t.$$

Soit $M \geq 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ (f est bornée par hypothèse). On a donc

$$|f^{(n)}(0)| \;\leq\; \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \left| f\left(r\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{e}^{-int} \right| \mathrm{d}t \;\leq\; \frac{Mn!}{r^n}.$$

En faisant tendre r vers l'infini on en déduit que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et donc f est constante égale à $f(0)$ (f est égale à son DSE en 0). □

On donne comme application du théorème de Liouville une (des nombreuses) démonstration du théorème de D'Alembert-Gauss, aussi appelé théorème fondamental de l'algèbre.

Théorème 4.6 (D'Alembert-Gauss)**.** *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. On va raisonner par contraposition en supposant que P n'a aucune racine et en montrant que P est constant. La fonction $z \mapsto P(z)$ est C^1 (elle est même évidemment analytique) et ne s'annule pas donc la fonction $f = \frac{1}{P}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{C}$. Il suffit alors de montrer que $\frac{1}{P}$ est bornée. D'après le théorème de Liouville elle sera constante donc la fonction P le sera aussi. On écrit $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ avec $a_n \neq 0$ (l'un des coefficients est non-nul sinon P serait nul). On a, pour $z \neq 0$,

$$\frac{1}{P}(z) = \frac{1}{a_n z^n} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right)^{-1}$$

donc $\lim\limits_{|z|\to\infty} \left|\dfrac{1}{P}(z)\right| = 0$. Il existe donc $R > 0$ tel si $|z| > R$ on a $\left|\frac{1}{P}(z)\right| \leq 1$. Par ailleurs $\overline{D}(0, R)$ est compact et la fonction $\frac{1}{P}$ est continue donc il existe $M \geq 0$ tel que si $|z| \leq R$ on a $\left|\frac{1}{P}(z)\right| \leq M$. Finalement pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $\left|\frac{1}{P}(z)\right| \leq \max(1, M)$. La fonction $\frac{1}{P}$ est donc bien bornée. □

Théorème 4.7. *[Principe du maximum] Soit Ω un domaine et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ de classe C^1. Si $|f|$ admet un maximum local en z_0 alors f est constante.*

Remarque 4.10. *Encore une fois ce résultat est totalement faux pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ même si on suppose que la fonction est analytique comme le montre l'exemple de la fonction* sin.

Démonstration. Supposons que $|f|$ admette un maximum local en z_0. Il existe $r > 0$ tel que pour tout $z \in \overline{D}(z_0, r)$ on a $|f(z_0)| \geq |f(z)|$. En particulier pour tout $t \in [0, 2\pi]$ on a $|f(z_0 + re^{it})| \leq |f(z_0)|$ et donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(z_0 + re^{it}\right)\right|^2 \mathrm{d}t \;\leq\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)|^2 \, \mathrm{d}t = |f(z_0)|^2.$$

D'après (4.8) on a donc

$$|f(z_0)|^2 + \sum_{n=1} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|^2 r^{2n} \leq |f(z_0)|^2.$$

On en déduit que $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et donc, puisque f est C^1 et donc analytique, f est constante égale à $f(z_0)$ d'après la Proposition 4.4. □

Définition 4.4. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ on appelle frontière, ou bord, de Ω l'ensemble $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \mathring{\Omega}$. En particulier si Ω est ouvert on a $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$.*

Exemple 4.5. *Si $\Omega = D(z_0, R)$ alors $\partial\Omega = C(z_0, R)$.*

Théorème 4.8. *[Principe du maximum, version globale] Soit Ω un domaine borné et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et de classe C^1 sur Ω. Alors f est bornée et $\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$. Si de plus il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $|f(z_0)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$ alors f est constante.*

Démonstration. L'ensemble Ω est borné donc, d'après le Corollaire 2.2, $\overline{\Omega}$ est compact. Comme f est continue, le Théorème 2.2 assure que f est bornée et que $|f|$ admet un maximum. Le même argument prouve que $|f|$ admet un maximum sur $\partial\Omega$. Cet ensemble est en effet fermé, c'est l'intersection des deux fermés $\overline{\Omega}$ et Ω^c, et borné puisque inclus dans $\overline{\Omega}$ donc compact.

Comme $\partial\Omega \subset \overline{\Omega}$ on a évidemment $\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| \geq \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$. On montre l'autre inégalité. Soit $z_0 \in \overline{\Omega}$ tel que $|f(z_0)| = \max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)|$. On a soit $z_0 \in \partial\Omega$ soit $z_0 \in \Omega$. Si $z_0 \in \partial\Omega$ on a alors

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = |f(z_0)| \leq \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|.$$

Si par contre $z_0 \in \Omega$ alors z_0 est un maximum local de $f : \Omega \to \mathbb{C}$. D'après le Théorème 4.7 on en déduit que f est constante sur Ω et donc par continuité elle est constante sur $\overline{\Omega}$. En effet supposons que $f(z) = C$ pour tout $z \in \Omega$. Soit $z \in \overline{\Omega}$, alors il existe $(z_n)_n \in \Omega^{\mathbb{N}}$ telle que $z_n \to z$ mais $f(z_n) = C$ pour tout n et comme f est continue elle converge vers $f(z) = \lim f(z_n) = C$. Si f est constante sur $\overline{\Omega}$ on a évidemment $\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$.

Finalement l'argument ci-dessus montre bien que si $z_0 \in \Omega$ est tel que $|f(z_0)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$ alors f est constante. □

CHAPITRE 5

HOLOMORPHIE ET ANALYTICITÉ

On s'est beaucoup intéressé jusqu'ici aux propriétés des fonctions C^1 d'une variable complexe et à ses conséquences. Il nous reste encore à montrer que toute fonction dérivable est C^1, et donc analytique. La preuve va être intimement liée à la notion de primitive. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ dérivable et supposons que f admette une primitive F. Dans ce cas F est dérivable avec $F' = f$. Mais comme f est dérivable elle est continue donc F est C^1 et donc analytique. Sa dérivée f est donc aussi analytique. Si on pouvait montrer qu'une fonction holomorphe admet toujours une primitive le problème serait résolu. On a cependant vu que ce n'était pas toujours vrai, comme le prouve l'exemple de la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ sur $\Omega = \mathbb{C}^*$.

Afin de voir comment trouver une primitive d'une fonction f donnée on peut se rappeler ce qu'on sait dans $\mathbb{R}$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue, avec I un intervalle, et $x_0 \in I$ alors la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f. L'idée est de faire la même chose dans $\mathbb{C}$. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ avec Ω un domaine et $z_0 \in \Omega$, pour tout $z \in \Omega$ on choisit un chemin γ allant de z_0 à z (γ existe puisque Ω est connexe par arcs) et on "définit" l'inégrale de f le long du chemin γ, i.e. $F(z) = \displaystyle\int_{\gamma} f(w)\,\mathrm{d}w$. Il y a alors immédiatement deux questions qui se posent :

1. Que veut dire cette intégrale ?
2. Une fois qu'on aura défini une telle intégrale, celle-ci dépend-elle du choix du chemin γ reliant z_0 à z ? Si $F(z)$ dépend du choix du chemin γ pourquoi y en aurait-il un meilleur qu'un autre ? Remarquons que ce problème ne se pose pas dans $\mathbb{R}$ puisque pour aller de x_0 à x il n'y a qu'un chemin : le segment d'extrêmités x_0 et x. On va voir que dans $\mathbb{C}$ ce n'est pas aussi évident, et qu'en général l'intégrale dépend du choix du chemin.

5.1 Intégrale le long d'un chemin

Définition 5.1. *1. On appelle* chemin *une application $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue et C^1 par morceaux. L'image du chemin γ est l'ensemble $\Gamma = \gamma([a,b]) \subset \mathbb{C}$.*

2. Un chemin fermé *est un chemin tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

3. Un chemin simple *est un chemin tel que γ est injectif sur $[a,b[$, i.e. mis à part éventuellement à ses extrêmités γ ne passe pas deux fois par le même "point de $\mathbb{C}$".*

4. Un lacet *est un chemin fermé simple.*

Exemple 5.1. *1. Si $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est défini par $\gamma(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{it}$ alors γ est un lacet dont l'image est le cercle $C(z_0, r)$ parcouru dans le sens trigonométrique.*

2. Si $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est défini par $\gamma(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{-it}$ alors γ est un lacet dont l'image est le cercle $C(z_0, r)$ parcouru dans le sens inverse du sens trigonométrique.

3. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ est défini par $\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) = (1-t)z_1 + tz_2$ alors γ est un chemin simple dont l'image est le segmet $[z_1, z_2]$ (parcouru de z_1 vers z_2).

Définition 5.2. *Soit Ω un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin dont l'image est incluse dans Ω, i.e. tel que $\gamma([a,b]) \subset \Omega$. On appelle intégrale de f le long de γ la quantité*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.1}$$

Remarque 5.1. *Lorsque γ est de classe C^1 il n'y a pas de problème dans la définition ci-dessus. Lorsque la fonction γ est seulement C^1 par morceaux il existe une subdivision $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ telle que γ soit C^1 sur chaque $]t_k, t_{k+1}[$ et dont la restriction à chacun de ces intervalles est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $[t_k, t_{k+1}]$. En particulier $\gamma'(t)$ n'est pas forcément définie aux points t_k. L'intégrale (5.1) est alors à comprendre comme ce qu'on a fait pour les séries de Fourier, i.e.*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

La définition ci-dessus est assez naturelle. Le long du chemin γ on a $z = \gamma(t)$ et tout se passe comme si on faisait le chemin de variable $z = \gamma(t)$. Le $\mathrm{d}z$ donne alors le $\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$ comme pour les changements de variables dans les intégrales dans $\mathbb{R}$.

Exemple 5.2. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et γ le segment d'extrêmités α et β. On peut alors paramétrer ce segment par $\gamma : [0,1] \ni t \mapsto \alpha + t(\beta - \alpha) \in \mathbb{C}$. Etant donnée une fonction continue f on a alors, puisque $\gamma'(t) = \beta - \alpha$ pour tout t,*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 f\big(\alpha + t(\beta-\alpha)\big) \times (\beta - \alpha)\,\mathrm{d}t \overset{s=\alpha+t(\beta-\alpha)}{=} \int_\alpha^\beta f(s)\,\mathrm{d}s.$$

On retrouve évidemment l'intégrale usuelle entre α et β, parcourue dans le même sens que le segment c'est-à-dire en allant de α vers β.

La propriété ci-dessous découle directement de la définition et la preuve est laissée à titre d'exercice.

Proposition 5.1 (Linéarité)**.** *Soit Ω un ouvert, $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin dont l'image est incluse dans Ω. Alors $\displaystyle\int_\gamma (\lambda f + g)(z)\,\mathrm{d}z = \lambda \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z$.*

Exemple 5.3. *1. Soient γ_1 et γ_2 les chemins définis par $\gamma_1 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ni t \mapsto \mathrm{r}e^{it} \in \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \ni t \mapsto \mathrm{r}e^{-it} \in \mathbb{C}$. L'image de γ_1 est le quart de cercle de centre 0 et de rayon r partant du point d'affixe r et allant au point d'affixe ir dans le sens trigonométrique (on parle aussi de sens direct) tandis que l'image de γ_2 est le trois-quart de cercle de centre 0 et de rayon r partant du point d'affixe r et allant au point d'affixe ir dans le sens inverse du sens trigonométrique (on parle de sens indirect). Leurs images Γ_1 et Γ_2 sont incluses dans $\mathbb{C}^*$. Soit $f : \mathbb{C}^* \ni z \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$. On a*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\mathrm{r}e^{it}} \times i\mathrm{r}e^{it}\,\mathrm{d}t = i\frac{\pi}{2},$$

tandis que

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{3\pi/2} \frac{1}{\mathrm{r}e^{-it}} \times -i\mathrm{r}e^{-it}\,\mathrm{d}t = -i\frac{3\pi}{2}.$$

On peut voir sur cet exemple que l'intégrale de f entre les deux points d'affixes respectives r et ir dépend a priori du chemin choisi puisque les intégrales le long de γ_1 et de γ_2 sont différentes.

2. Considérons maintenant les chemins $\gamma_3 : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \ni t \mapsto \mathrm{r}e^{i2t} \in \mathbb{C}$ et $\gamma_4 : \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \ni t \mapsto \mathrm{r}e^{-it} \in \mathbb{C}$. L'image de γ_3 est la même que celle de γ_1 tandis que celle de γ_4 est la même mais parcourue dans le sens inverse. On calcule alors

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\mathrm{r}e^{i2t}} \times 2i\mathrm{r}e^{i2t}\,\mathrm{d}t = i\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{3\pi/2} 0^{2\pi} \frac{1}{\mathrm{r}e^{-it}} \times -i\mathrm{r}e^{-it}\,\mathrm{d}t = -i\frac{\pi}{2}.$$

On peut voir que l'intégrale le long de γ_3 est la même que pour γ_1 (les images des chemins sont les mêmes et parcourus dans le même sens) tandis que celle le long de γ_4 en est l'opposée (l'image est la même mais parcourue dans le sens inverse).

3. On considère enfin les chemins $\gamma_5 : [0, 2\pi] \ni t \mapsto \mathrm{r}e^{it} \in \mathbb{C}$ et $\gamma_6 : [0, 4\pi] \ni t \mapsto \mathrm{r}e^{it} \in \mathbb{C}$. Leurs images sont le cercle $C(0, r)$ parcouru dans le sens trigonométrique, une fois pour γ_5 et deux fois pour γ_6. On calcule facilement cette fois que $\displaystyle\int_{\gamma_5} f(z)\,\mathrm{d}z = 2i\pi$ et $\displaystyle\int_{\gamma_6} f(z)\,\mathrm{d}z = 4i\pi = 2\int_{\gamma_5} f(z)\,\mathrm{d}z$. Le fait de parcourir deux fois le cercle a pour effet de compter double l'intégrale de f.

Les propriétés 2. et 3. observées dans l'exemple ci-dessus sont assez naturelles et ne sont pas un cas particulier.

Définition 5.3. *Soient $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2]$ deux chemins. On dit que γ_1 et γ_2 sont*

1. équivalents *s'il existe $\varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ bijective de classe C^1 strictement croissante telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. Les images de γ_1 et γ_2 sont les même et parcourues dans le même sens.*
2. opposés *s'il existe $\varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ bijective de classe C^1 strictement décroissante telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. Les images de γ_1 et γ_2 sont les même mais parcourues dans le sens inverse.*

Définition 5.4. *Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est un chemin on notera $\gamma_{\text{inv}} : [a,b] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma_{\text{inv}}(t) = \gamma(a+b-t)$. L'image de γ_{inv} est la même que celle de γ mais parcourue dans le sens inverse.*

Proposition 5.2. *Soit Ω un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue et γ_1, γ_2 deux chemins d'image incluses dans Ω.*

1. *Si γ_1 et γ_2 sont équivalents alors $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$,*
2. *Si γ_1 et γ_2 sont opposés alors $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$. En particulier pour tout chemin γ on a $\displaystyle\int_{\gamma_{\text{inv}}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$.*

Démonstration. On fait la preuve dans le cas où γ_1, γ_2 sont de classe C^1. S'ils ne sont que C^1 par morceaux la preuve est similaire mais il faut découper l'intégrale par rapport à des subdivisions adaptées et utiliser la relation de Chasles. La preuve découle simplement de la formule de changement de variable pour les intégrales dans $\mathbb{R}$.

Soient donc $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2, b_2]$ et $\varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ bijective de classe C^1 telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. On a

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z &\overset{\text{def}}{=} \int_{a_1}^{b_1} f\big(\gamma_1(t)\big)\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t \\ &\overset{\gamma_1=\gamma_2\circ\varphi}{=} \int_{a_1}^{b_1} f\big(\gamma_2(\varphi(t))\big) \times \varphi'(t)\gamma_2'(\varphi(t))\,\mathrm{d}t \\ &\overset{s=\varphi(t)}{=} \int_{\varphi(a_1)}^{\varphi(a_2)} f\big(\gamma_2(s)\big)\gamma_2'(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Si γ_1 et γ_2 sont équivalents on choisit φ comme ci-dessus strictement croissant. On a alors $\varphi(a_1) = a_2$ et $\varphi(b_1) = b_2$ et donc

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{a_2}^{b_2} f\big(\gamma_2(s)\big)\gamma_2'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Si par contre γ_1 et γ_2 sont opposés on choisit φ comme ci-dessus strictement décroissant. On a alors $\varphi(a_1) = b_2$ et $\varphi(b_1) = a_2$ et donc

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{b_2}^{a_2} f\big(\gamma_2(s)\big)\gamma_2'(s)\,\mathrm{d}s = -\int_{a_2}^{b_2} f\big(\gamma_2(s)\big)\gamma_2'(s)\,\mathrm{d}s = -\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

□

On est parfois amené à décomposer un chemin en plusieurs morceaux. On a alors la propriété suivante qui est l'analogue de la relation de Chasles.

Proposition 5.3. *Soient $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{C}$ deux chemins tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ et $\gamma : [a,c] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = \gamma_1(t)$ si $t \leq b$ et $\gamma(t) = \gamma_2(t)$ sinon. Si Ω est un ouvert tel que $\gamma([a,c]) \subset \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue alors*

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Le chemin γ s'appelle la concaténation des chemins γ_1 et γ_2.

Corollaire 5.1. *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet et γ_n le chemin fermé constitué de $n \in \mathbb{N}$ copies de γ, i.e. l'image de γ_n est la même que celle de Γ mais parcouru n fois dans le même sens. Alors pour tout ouvert Ω tel que $\gamma([a,b]) \subset \Omega$ et toute fonction continue $f : \Omega \to \mathbb{C}$ on a $\displaystyle\int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z = n \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.*

Exercice 5.1. *Démontrez la proposition et le corollaire ci-dessus.*

Une autre propriété courante de l'intégrale est l'inégalité triangulaire. Ici il faut faire un peu plus attention. On ne peut pas simplement comparer $\left|\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right|$ et $\displaystyle\int_\gamma |f(z)|\,\mathrm{d}z$ puisque cette dernière quantité est a priori un nombre complexe. Prenez par exemple la fonction f constante égale à 1 et γ le quart de cercle comme dans l'Exemple 5.3. On a alors

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\pi/2} ir\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\left[r\mathrm{e}^{it}\right]_0^{\pi/2}\right| = |ir - r| = r\sqrt{2},$$

tandis que

$$\int_\gamma |f(z)|\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} ir\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = r(-1+i).$$

Définition 5.5. *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin. On appelle longueur de γ la quantité $L(\gamma) = \displaystyle\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$.*

Exemple 5.4. *Si $[z_1, z_2]$ est un segment on peut prendre $\gamma : [0,1] \ni t \mapsto z_1 + t(z_2 - z_1)$. On a $\gamma'(t) = z_2 - z_1$ et on trouve donc, évidemment, $L(\gamma) = \int_0^1 |z_2 - z_1|\,\mathrm{d}t = |z_2 - z_1|$.*

Remarque 5.2. *En paramétrant le cercle $C(z_0, r)$ par $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + r\mathrm{e}^{it}$ on retrouve que la longueur du cercle est*

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \left|ir\mathrm{e}^{it}\right|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}t = 2\pi r.$$

Remarquez que pour démontrer ça on a utilisé la construction de π telle que donnée dans le Théorème 3.1 et les propriétés qui en ont suivi. La définition de π donnée dans le Théorème 3.1 coincide donc bien avec la définition usuelle et reliant le rayon d'un cercle avec son périmètre. Plus généralement, si $\theta \in [0, 2\pi]$, l'arc de cercle de centre 0 et allant du point d'affixe 1 au point d'affixe $\mathrm{e}^{i\theta}$ est paramétré par $\gamma : [0, \theta] \ni t \mapsto \mathrm{e}^{it} \in \mathbb{C}$ et sa longueur est donc

$$\int_0^\theta \left|i\mathrm{e}^{it}\right|\,\mathrm{d}t = \theta.$$

Proposition 5.4. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $\gamma : [a,b] \to \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue. Alors*

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \sup_{t\in[a,b]} \left|f\big(\gamma(t)\big)\right| \times L(\gamma).$$

Démonstration. Cela découle simplement de l'inégalité triangulaire usuelle pour les intégrales de fonctions d'une variable réelle.

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_a^b \left|f\big(\gamma(t)\big)\right| \times |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \sup_{t\in[a,b]} \left|f\big(\gamma(t)\big)\right| \times \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \sup_{t\in[a,b]} \left|f\big(\gamma(t)\big)\right| \times L(\gamma).\end{aligned}$$

5.2 Fonctions holomorphes, primitives et analyticité

On a vu dans l'Exemple 5.3 que l'intégrale d'une fonction pouvait a priori dépendre du chemin parcouru et pas seulement des extrêmités. Cependant si f admet une primitive ce n'est plus le cas.

Proposition 5.5. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue admettant une primitive F. Alors pour tout chemin $\gamma : [a,b] \to \Omega$ on a*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).$$

En particulier si γ est un lacet alors $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Remarque 5.3. *Même si on ne connait pas de primitive de f le fait qu'elle en ait une garantit que l'intégrale sur un lacet est nulle. Cette propriété joura un rôle important par la suite.*

Exemple 5.5. *Si on reprend l'Exemple 5.3 puisque $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} \neq \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{z}$ alors que γ_1 et γ_2 ont les même extrêmités cela prouve qu'il n'y a pas d'ouvert contenant γ_1 et γ_2 sur lequel $f(z) = \frac{1}{z}$ admette une primitive.*

Exemple 5.6. *Soit $f(z) = \bar{z}$ définie sur $\mathbb{C}$ et $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto re^{it} \to \mathbb{C}$ un paramétrage de $C(0,r)$ parcouru dans le sens trigonométrique. On a alors*

$$\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} re^{-it} \times ire^{it}\,\mathrm{d}t = 2i\pi r^2 \neq 0.$$

Comme γ est un lacet on en déduit que la fonction $z \mapsto \bar{z}$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}$.

Les deux exemples ci-dessus montrent que la question de l'existence d'une primitive n'est pas évidente. Pour la fonction $f(z) = \bar{z}$ on peut donner un argument plus général. Cette fonction est continue. Si elle avait une primitive F celle-ci serait une fonction C^1 donc analytique d'après le Théorème 4.3. La fonction f serait donc analytique aussi et en particulier dérivable mais on a vu que ce n'est pas le cas. Conclusion f ne peut avoir de primitive que si elle est analytique. Ce n'est cependant pas suffisant. La fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$, alors que c'est une fonction analytique. Elle en a par contre sur des domaines plus petits comme on l'a vu dans la Remarque 3.11. On voit ainsi que la forme du domaine peut aussi avoir une influence. On rappelle la définition d'un ensemble étoilé.

Définition 5.6. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ non-vide. Ω est étoilé s'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que pour tout $z \in \Omega$ on a $[z_0, z] \subset \Omega$. On précise parfois z_0 en disant que Ω est étoilé par rapport à z_0.*

Exemple 5.7. *1. L'ensemble $\mathbb{C}^*$ n'est pas étoilé. En effet, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$ on peut trouver $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $[z_0, z] \not\subset \mathbb{C}^*$. Il suffit de prendre $z = -z_0$.*

2. Un disque est étoilé, il suffit de prendre comme z_0 le centre du disque. En fait un disque est convexe donc n'importe quel point du disque convient.

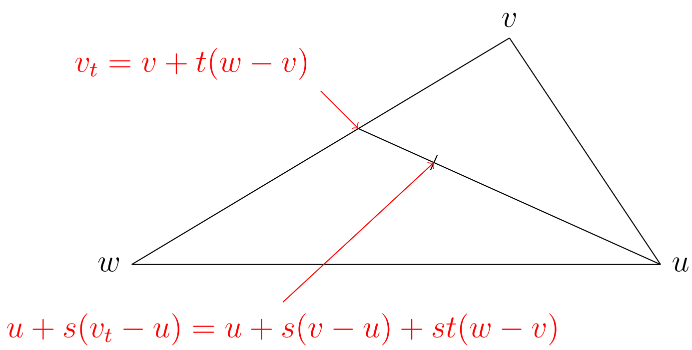
3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\Omega_\theta = \mathbb{C} \setminus \mathrm{e}^{i\theta}\mathbb{R}_+$ est étoilé. On peut alors prendre $z_0 = -\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i(\theta+\pi)}$ (ou n'importe quel point d'argument $\theta + \pi$). En effet, si $z = r\mathrm{e}^{i\varphi} \in \Omega_\theta$ avec $r > 0$ et $\varphi \in]\theta, \theta + 2\pi[$ il faut montrer que $[z_0, z] \subset \Omega_\theta$. Si $z_1 = (1-t)z_0 + tz \in [z_0, z]$, avec $t \in [0, 1]$, n'était pas dans Ω_θ on aurait $z_1 = R\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $R \geq 0$ et donc

$$R\mathrm{e}^{i\theta} = -(1-t)\mathrm{e}^{i\theta} + tr\mathrm{e}^{i\varphi} \iff tr\mathrm{e}^{i\varphi} = (R+1-t)\mathrm{e}^{i\theta}.$$

Comme $\varphi \in]\theta, \theta + 2\pi[$ on doit avoir $tr = R + 1 - t = 0$ ce qui n'est pas possible puisque $r > 0$, $R \geq 0$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 5.7. *Soient $u, v, w \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. On note $\partial T(u, v, w) = [u, v] \cup [v, w] \cup [w, u]$ le (bord du) triangle dont les sommets sont les points u, v et w. On notera aussi $T(u, v, w)$ le même triangle ainsi que son intérieur. Autrement dit*

$$T(u, v, w) = \{u + s(v-u) + st(w-v) \mid s, t \in [0, 1]\},$$



tandis qu'un paramétrage de $\partial T(u, v, w)$ est donné par $\gamma : [0, 3] \to \mathbb{C}$ avec

$$\gamma(t) = \begin{cases} u + t(v-u) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1, \\ v + (t-1)(w-v) & \text{si} \quad 1 \leq t \leq 2, \\ w + (t-2)(u-w) & \text{si} \quad 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

Le théorème qui suit permet de caractériser les fonctions qui admettent des primitives sur des ouverts étoilés.

Théorème 5.1. *Si Ω est un ouvert étoilé et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue. Alors f admet une primitive si et seulement si pour tout triangle $T(u, v, w) \subset \Omega$ on a $\displaystyle\int_{\partial T(u,v,w)} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$.*

Remarque 5.4. *Si Ω est étoilé il suffit de vérifier que $\partial T(u,v,w) \subset \Omega$ pour garantir que $T(u,v,w) \subset \Omega$. En effet soit z_0 tel que Ω soit étoilé par rapport à z_0. On suppose que $\partial T(u,v,w) \subset \Omega$ et on montre que $T(u,v,w) \subset \Omega$. Si $z \in T(u,v,w)$ alors la demi-droite d'origine z_0 et passant par z coupe $\partial T(u,v,w)$ au dela de z (éventuellement en $z \in \partial T(u,v,w)$). On note z_1 ce point. On a donc $z \in [z_0, z_1]$. Comme $z_1 \in \partial T(u,v,w) \subset \Omega$ et que Ω est étoilé par rapport à z_0 on en déduit que $z \in \Omega$.*

Démonstration. Un triangle est un lacet donc si f admet une primitive alors son intégrale le long de n'importe quel triangle est nulle d'après la Proposition 5.5.

Réciproquement on suppose que l'intégrale de f est nulle le long de tout chemin triangulaire. Soit z_0 tel que Ω soit étoilé par rapport à z_0. Pour tout $z \in \Omega$ on définit $F(z) = \displaystyle\int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w$. Le fait que Ω soit étoilé par rapport à z_0 garantit que $[z_0,z] \subset \Omega$. On va montrer que F est une primitive de f. On peut remarquer que cette approche est analogue à ce qu'on fait dans $\mathbb{R}$ où $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ définit une primitive de f lorsque f est continue.

Il faut montrer que pour tout z on a $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z)$. Soit donc $z \in \Omega$. Pour tout h tel que $z+h \in \Omega$ (c'est le cas au moins si h est dans un disque centré en 0 puisque Ω est ouvert) on a

$$F(z+h)-F(z) = \int_{[z_0,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w - \int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{[z_0,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[z,z_0]} f(w)\,\mathrm{d}w.$$

On considère le triangle de sommets z, z_0 et $z+h$. Par hypothèse on a

$$\int_{[z,z_0]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[z_0,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[z+h,z]} f(w)\,\mathrm{d}w = 0$$

et donc

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = -\frac{1}{h}\int_{[z+h,z]} f(w)\,\mathrm{d}w = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^1 f(z+th)\,\mathrm{d}t.$$

La continuité des intégrales à paramètres (on a une intégrale de la variable réelle ici) garantit que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}t = f(z)$. On peut aussi se passer de ce résultat sur les intégrales à paramètres. Vous ne l'avez en fait vu que si h est une variable réelle alors qu'ici h est complexe. On remarque qu'une fonction constante égale à α a pour primitive $w \mapsto \alpha w$ et donc pour tout segment $[z_1,z_2]$ on a $\displaystyle\int_{[z_1,z_2]} \alpha\,\mathrm{d}w = \alpha(z_2-z_1)$. Ainsi, en prenant $\alpha = f(z)$ et le segment $[z,z+h]$, on a

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w - \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(z)\,\mathrm{d}w = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} (f(w)-f(z))\,\mathrm{d}w.$$

En utilisant la Proposition 5.4 on en déduit que

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| \le \frac{1}{|h|} \sup_{w\in[z,z+h]} |f(w)-f(z)| \times L([z,z+h]) = \sup_{w\in[z,z+h]} |f(w)-f(z)|.$$

Comme f est continue en z cela garantit que le membre de droite tend vers 0 lorsque h tend vers 0 et donc que $\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z)$. □

Remarque 5.5. *Comme on l'a vu à travers la preuve si on sait que Ω est étoilé par rapport à z_0 on peut se restreindre dans le théorème précédent aux triangles dont z_0 est l'un des sommets. Par ailleurs le théorème montre que, au moins dans un ouvert étoilé, si l'intégrale le long de n'importe quel triangle est nulle alors la fonction admet une primitive et donc l'intégrale le long de n'importe quel lacet est nulle : si on sait ce qu'il se passe pour les triangles on récupère ce qu'il se passe pour tous les lacets.*

L'étape technique permettant de passer des fonctions holomorphes aux fonctions analytiques est fournie par le résultat suivant dont l'énoncé est à relier directement au Théorème 5.1

Théorème 5.2. *[Goursat] Soit Ω un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. Alors pour tous $u, v, w \in \mathbb{C}$ tels que $T(u, v, w) \subset \Omega$ on a $\int_{\partial T(u,v,w)} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$.*

Remarque 5.6. *Attention, on demande que le triangle plein $T(u, v, w)$ soit inclus dans Ω et pas juste son bord, voir l'exemple ci-dessous.*

Exemple 5.8. *Soit $\Omega = \mathbb{C}^*$ et $f(z) = \frac{1}{z}$. La fonction f est bien holomorphe sur Ω. Prenons le triangle de sommets $a = 1$, $b = \mathrm{e}^{i2\pi/3}$ et $c = \mathrm{e}^{i4\pi/3}$. Le bord du triangle est dans Ω mais pas son intérieur (0 est à l'intérieur du triangle). On va calculer l'intégrale de f le long du triangle. On a*

$$\int_{\partial T(a,b,c)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{[a,b]} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{[b,c]} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{[c,a]} \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Les segments $[a, b]$ et $[c, a]$ sont inclus dans $\Omega_{]-\pi,\pi[}$ sur lequel la fonction f admet comme primitive, voir la Remarque 3.11, la détermination principale du logarithme. On a donc

$$\int_{[a,b]} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{[c,a]} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \mathrm{Log}(b) - \mathrm{Log}(a) + \mathrm{Log}(a) - \mathrm{Log}(c) = i\frac{2\pi}{3} - \left(-i\frac{2\pi}{3}\right) = i\frac{4\pi}{3}.$$

Enfin $[b, c]$ est inclus dans $\Omega_{]0,2\pi[}$ sur lequel la fonction f admet comme primitive la fonction $F(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$ où $\arg(z)$ est l'unique argument de z dans $]0, 2\pi[$. Ainsi $\int_{[b,c]} \frac{\mathrm{d}z}{z} = F(c) - F(b) = i\frac{4\pi}{3} - i\frac{2\pi}{3} = i\frac{2\pi}{3}$. Finalement on obtient $\int_{\partial T(a,b,c)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2i\pi \neq 0$.

Avant de donner la preuve du Théorème de Goursat, parfois aussi appelé Lemme de Goursat, voyons en deux conséquences importantes sur les fonctions holomorphes.

Théorème 5.3. *Soit Ω un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. Alors f est analytique.*

Remarque 5.7. *Comme une fonction holomorphe est analytique, elle vérifie toutes les propriétés vues au chapitre précédent : formule de Cauchy, zéros isolés, prolongement analytique, principe du maximum, théorème de Liouville.*

Démonstration. On veut montrer que f est DSE en tout $z_0 \in \Omega$. Soit donc $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$ (Ω est ouvert). D'après le Théorème de Goursat pour tout triangle $T(a, b, c)$ inclus dans $D(z_0, r)$ on a $\int_{\partial T(a,b,c)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Comme $D(z_0, r)$ est étoilé le Théorème 5.1 garantit que f admet une primitive F sur $D(z_0, r)$. La fonction F est C^1 sur $D(z_0, r)$, puisque sa dérivée est continue car dérivable, donc F y est analytique. Sa dérivée f est donc analytique sur $D(z_0, r)$ et en particulier elle est DSE en z_0. □

Théorème 5.4. *Soit Ω un ouvert étoilé et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. Alors pour tout lacet γ dont l'image est incluse dans Ω on a $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.*

Démonstration. L'idée de la preuve est essentiellement la même que celle du théorème précédent. Comme f est holomoprhe son intégrale le long de n'importe quel triangle inclus dans Ω est nulle d'après le Théorème de Goursat. Puisque Ω est étoilé le Théorème 5.1 garantit que f admet une primitive F sur Ω et donc son intégrale le long de n'importe quel lacet est nulle. □

Corollaire 5.2. *Soit Ω un ouvert étoilé et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. Pour tous $z_1, z_2 \in \Omega$ et tous chemins γ_1, γ_2 allant de z_1 à z_2 on a $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$.*

Application. On va utiliser le Théorème 5.4 pour calculer la *transformée de Fourier* de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. Celle-ci joue un rôle important en mathématiques et en particulier en théorie des probabilités (voir le cours de Probabilités et Statistiques du S6). Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction intégrable, i.e. telle que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ soit convergente, on appelle transformée de Fourier de f la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\displaystyle f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-itx} f(x)\,\mathrm{d}x$. Comme $t, x \in \mathbb{R}$ on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\mathrm{e}^{-itx}| = 1$ ce qui prouve que l'intégrale $\int \mathrm{e}^{-itx} f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente et donc convergente sur $\mathbb{R}$, donc $\hat{f}(t)$ est bien définie. Le préfacteur $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ est une convention qui peut varier selon les livres.

Ici $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. La fonction f est bien intégrable sur $\mathbb{R}$ (vérifiez-le). On rappelle de plus que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$ (voir cours-TD d'intégration de L2). Afin de calculer $\hat{f}(t)$ on va considérer l'intégrale de la fonction $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}$ le long du lacet γ_R composé des segments de sommets $z_1 = -R$, $z_2 = R$, $z_3 = R + it$, $z_4 = -R + it$, i.e. l'image de γ_R est un rectangle. La fonction g est holomorphe comme composée de fonctions holomorphes et on a donc, pour tout $R > 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_R} g(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{[-R,R]} g(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[R,R+it]} g(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[R+it,-R+it]} g(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[-R+it,-R]} g(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x + \int_0^t \mathrm{e}^{-(R+is)^2/2} i\,\mathrm{d}s - \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-(x+it)^2/2}\,\mathrm{d}x - \int_0^t \mathrm{e}^{-(-R+is)^2/2} i\,\mathrm{d}s \quad (5.2) \end{aligned}$$

On va regarder chacun des quatre termes. Comme $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ on a

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

Le troisième terme s'écrit

$$\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-(x+it)^2/2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-itx-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-itx}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

et le même argument que ci-dessus montre qu'on a

$$\lim_{R\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-itx}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-itx}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\,\hat{f}(t).$$

Pour le deuxième terme on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^t \mathrm{e}^{-(R+is)^2/2} i\,\mathrm{d}s\right| &\le \int_0^{|t|} \left|\mathrm{e}^{-(R+is)^2/2}\right|\,\mathrm{d}s \\
&\le \int_0^{|t|} \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(-(R+is)^2/2)}\,\mathrm{d}s \\
&\le \int_0^{|t|} \mathrm{e}^{(-R^2+s^2)/2}\,\mathrm{d}s \\
&\le |t|\mathrm{e}^{(-R^2+t^2)/2},
\end{aligned}$$

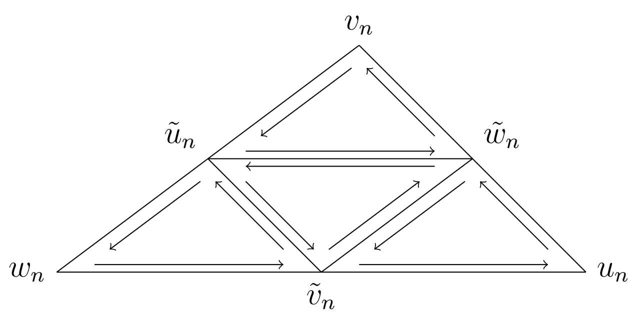
et donc $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{-(R+is)^2/2} i\,\mathrm{d}s = 0$. On montre de la même façon que le quatrième terme de (5.2) tend vers 0 lorsque $R \to +\infty$. En passant à la limite $R \to +\infty$ dans (5.2) on en déduit donc que

$$0 = \sqrt{2\pi} + 0 - \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\hat{f}(t) + 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{f}(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} = f(t),$$

i.e. la transformée de Fourier de la gaussienne est elle-même.

Démonstration du Théorème 5.2. Soient u, v, w tel que $T(u,v,w) \subset \Omega$. On veut montrer que $\displaystyle\int_{\partial T(u,v,w)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

On note $u_0 = u$, $v_0 = v$, $w_0 = w$ et on va construire une suite de chemins triangulaires $\tau_n = \partial T(u_n, v_n, w_n)$ de la façon suivante. Etant construit τ_n on note $\tilde{u}_n$, $\tilde{v}_n$ et $\tilde{w}_n$ les milieux des côtés de τ_n opposés à u_n, v_n, w_n, i.e. $\tilde{u}_n = \frac{v_n+w_n}{2}$, $\tilde{v}_n = \frac{u_n+w_n}{2}$ et $\tilde{w}_n = \frac{u_n+v_n}{2}$. On décompose alors τ_n à l'aide des 4 triangles comme sur le dessin ci-dessous

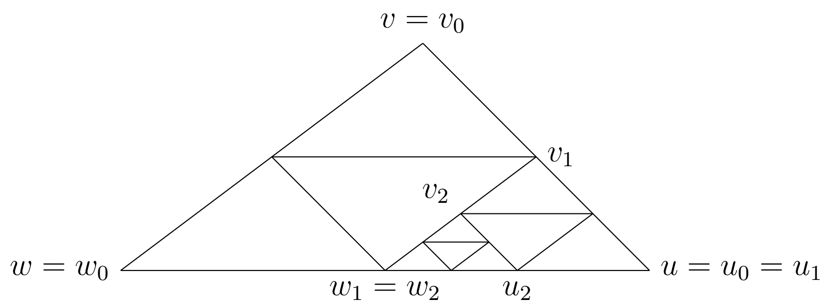


$$\begin{aligned}
&\int_{\tau_n} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{[u_n,v_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[v_n,w_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[w_n,u_n]} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{[u_n,\tilde w_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\tilde w_n,v_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[v_n,\tilde u_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\tilde u_n,w_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[w_n,\tilde v_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\tilde v_n,u_n]} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{[u_n,\tilde w_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\tilde w_n,\tilde v_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\tilde v_n,u_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\tilde w_n,v_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[v_n,\tilde u_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\tilde u_n,\tilde w_n]} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&\quad + \int_{[\tilde u_n,w_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[w_n,\tilde v_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\tilde v_n,\tilde u_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\tilde u_n,\tilde v_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\tilde v_n,\tilde w_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\tilde w_n,\tilde u_n]} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{\partial T(u_n,\tilde w_n,\tilde v_n)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\partial T(\tilde w_n,v_n,\tilde u_n)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\partial T(\tilde u_n,w_n,\tilde v_n)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\partial T(\tilde u_n,\tilde v_n,\tilde w_n)} f(z)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

On choisit τ_{n+1} parmi $\partial T(u_n,\tilde w_n,\tilde v_n)$, $\partial T(\tilde w_n,v_n,\tilde u_n)$, $\partial T(\tilde u_n,w_n,\tilde v_n)$ et $\partial T(\tilde u_n,\tilde v_n,\tilde w_n)$, tel que le module de l'intégrale de f soit maximum. L'inégalité triangulaire garantit alors que

$$\left|\int_{\tau_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 4\left|\int_{\tau_{n+1}} f(z)\,\mathrm{d}z\right|.$$

D'autre part on vérifie facilement que le périmètre de τ_{n+1} est la moitié de celui de τ_n, i.e. $L(\tau_{n+1}) = \frac{1}{2}L(\tau_n)$. On construit ainsi par récurrence la suite de triangles (τ_n).



On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\int_{\tau_0} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 4^n\left|\int_{\tau_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \quad \text{et} \quad L(\tau_n) = \frac{1}{2^n}L(\tau_0). \tag{5.3}$$

Quelle que soit la façon de nommer les sommets des triangles successifs on a toujours $|u_{n+1} - u_n| \leq L(\tau_n) = \frac{1}{2^n}L(\tau_0)$. La série $\sum u_{n+1} - u_n$ est donc absolument convergente donc convergente, i.e. la suite $(u_n)_n$ converge. On note z_0 sa limite. Comme $L(\tau_n) \to 0$ on en déduit facilement que les suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent aussi vers z_0 qui est dans le triangle initial (ou sur le bord).

La fonction f est dérivable en z_0, il faut bien utiliser l'hypothèse de dérivabilité à un moment donné, donc il existe $\varepsilon(z) \overset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0$ telle que

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + |z - z_0|\varepsilon(z).$$

La fonction $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ est polynomiale donc admet une primitive. Son intégrale le long de n'importe quel lacet est donc nulle, en particulier le long de n'importe quel triangle τ_n. Ainsi on a, pour tout n,

$$\left|\int_{\tau_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\tau_n} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\tau_n} \left(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\right)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\tau_n} |z - z_0|\varepsilon(z)\,\mathrm{d}z\right|.$$

et donc en utilisant la Proposition 5.4 on a

$$\left|\int_{\tau_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq L(\tau_n) \sup_{z\in\tau_n} |z - z_0| \times |\varepsilon(z)|.$$

Pour tout $z \in \tau_n$, comme z_0 est intérieur au triangle τ_n on a $|z - z_0| \leq \frac{1}{2}L(\tau_n)$ (la longueur maximale est celle du plus grand côté du triangle qui est inférieure au demi-périmètre). Finalement, en utilisant la majoration ci-dessus et (5.3), on a pour tout n

$$\left|\int_{\tau_0} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 4^n \left|\int_{\tau_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 4^n \frac{L(\tau_n)^2}{2} \sup_{z\in\tau_n} |\varepsilon(z)| = \frac{L(\tau_0)^2}{2} \sup_{z\in\tau_n} |\varepsilon(z)|.$$

Comme $\lim_{z\to z_0} \varepsilon(z) = 0$ on en déduit que $\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\tau_n} |\varepsilon(z)| = 0$ (les points sur τ_n sont à distance au plus $\frac{L(\tau_n)}{2} = \frac{L(\tau_0)}{2^{n+1}}$ de z_0) et donc que $\displaystyle\int_{\partial T(u,v,w)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\tau_0} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. □

On termine cette section avec la réciproque du Théorème de Goursat.

Théorème 5.5. *[Morera] Soit Ω un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue. Si pour tous $a, b, c \in \mathbb{C}$ tel que $T(a, b, c) \subset \Omega$ on a $\displaystyle\int_{\partial T(a,b,c)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ alors f est holomorphe.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$. L'ensemble $D(z_0, r)$ est étoilé donc d'après le Théorème 5.1 la fonction f admet une primitive F sur $D(z_0, r)$. La fonction F est holomorphe sur $D(z_0, r)$ donc y est analytique et donc f également. En particulier f est dérivable en z_0. C'est vrai pour tout $z_0 \in \Omega$ donc f est holomorphe sur Ω tout entier. □

Remarque 5.8. *Dans tout ce qu'on a fait dans cette section on peut généraliser un peu l'hypothèse sur Ω et remplacer la notion d'ouvert étoilé par celle d'ouvert dit* simplement connexe. *L'idée de Ω simplement connexe est qu'il n'y a pas de "trou à l'intérieur" de Ω. Autrement dit, quel que soit le lacet qu'on prenne dans Ω tout ce qui est à l'intérieur du lacet est dans Ω. La notion d'ouvert étoilé est amplement suffisante pour ce qu'on fera par la suite, on se restreindra donc à ce cadre plus simple à définir proprement.*

5.3 Indice d'un point par rapport à un chemin fermé

Le même calcul que dans l'Exemple 5.3 montre que si $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}$ est un paramétrage du cercle $C(z_0, r)$ parcouru une fois dans le sens direct on a $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w - z_0} = 2i\pi$. Plus généralement, la formule de Cauchy (4.6) appliquée à la fonction constante égale à 1 montre que si $z \in D(z_0, r)$ on a

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w - z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z_0 + re^{it} - z} ire^{it}\,\mathrm{d}t = 2i\pi,$$

tandis que si $z \notin \overline{D}(z_0, r)$ on a, voir (4.7),

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w-z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z_0 + re^{it} - z} ire^{it}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Etant donné $n \in \mathbb{Z}$ on considère cette fois $\gamma_n : [0, 2n\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}$ si $n \geq 0$ et $\gamma_n : [2n\pi, 0] \ni t \mapsto z_0 + re^{-it}$ si $n < 0$. On a ainsi un paramétrage du cercle $C(z_0, r)$ parcouru $|n|$ fois, dans le sens direct si $n > 0$ et indirect si $n < 0$. En utilisant le Corollaire 5.1 et la Proposition 5.2 on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$\int_{\gamma_n} \frac{\mathrm{d}w}{w-z} = n \times \int_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w-z} = \begin{cases} 2in\pi & \text{si} \quad z \in D(z_0, r), \\ 0 & \text{si} \quad z \notin \overline{D}(z_0, r). \end{cases}$$

Autrement dit, au facteur $2i\pi$ près, l'intégrale de la fonction $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ le long de γ_n compte le nombre de tours faits par le chemin fermé γ_n autour de z en comptant ces tours positivement s'ils sont dans le sens direct et négativement dans le sens indirect : n tours si z est à l'intérieur du cercle et que celui-ci est parcouru n fois et 0 tours si z est à l'extérieur du cercle. Cela se généralise à n'importe quel chemin fermé γ et n'importe quel point z qui n'est pas sur l'image de γ (sinon l'intégrale considérée n'aura pas de sens).

Définition 5.8. *Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin fermé d'image Γ et $z \notin \Gamma$. On appelle indice de z par rapport à γ la quantité*

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w-z}.$$

Remarque 5.9. *L'indice ne dépend pas du paramétrage choisi mais uniquement de son image Γ, en prenant en compte le sens de parcours et le nombre de fois où le chemin est parcouru.*

L'interprétation de l'indice est qu'il compte le nombre de tours que γ fait autour de z. Afin de comprendre l'intuition derrière on va se placer d'abord dans un cas particulier. Comme z n'est pas sur l'image de γ, pour tout t on peut écrire $\gamma(t) - z = r(t)e^{i\theta(t)}$ avec $r(t) = |\gamma(t) - z| > 0$ et $\theta(t)$ un argument de $\gamma(t) - z$. On va supposer que les deux fonctions $r(t)$ et $\theta(t)$ sont de classe C^1 (c'est facile à justifier pour $r(t)$ si $\gamma(t)$ est C^1, faites-le, mais ce n'est pas évident pour $\theta(t)$). Comme γ est un chemin fermé on a $\gamma(a) = \gamma(b)$ et donc $r(a) = r(b)$ et $\theta(b) - \theta(a) = 2n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Comme la fonction $t \mapsto \theta(t)$ est continue l'entier n compte bien le nombre total de tours fait par γ autour de z, comptés positivement si on va dans le sens direct et négativement dans le sens indirect. On calcule alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}(\gamma, z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{1}{\gamma(t) - z} \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{1}{r(t)e^{i\theta(t)}} \left(r'(t)e^{i\theta(t)} + r(t)\theta'(t)e^{i\theta(t)} \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{r'(t)}{r(t)} + i\theta'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2i\pi} \left[\ln(r(t)) + i\theta(t) \right]_a^b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}(\gamma, z) &= \frac{1}{2i\pi}\left(\underbrace{\ln(r(b)) - \ln(r(a))}_{=0} + \underbrace{i\theta(b) - i\theta(a)}_{=2in\pi}\right)\\ &= n.\end{aligned}$$

Théorème 5.6. *Pour tout chemin fermé $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ d'image Γ et tout $z \notin \Gamma$ l'indice $\mathrm{Ind}(\gamma, z)$ est un nombre entier.*

Démonstration. Pour simplifier on fait la preuve dans le cas où γ est de classe C^1.

Pour tout $t \in [a, b]$ on considère $\varphi(t) = \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\,\mathrm{d}s\right)$. La quantité dans l'exponentielle n'est rien d'autre que l'intégrale de la fonction $f(w) = \frac{1}{w-z}$ le long du chemin γ_t obtenu comme la restriction de γ à l'intervalle $[a, t]$. On veut donc montrer que $\varphi(b) = 1$. La fonction φ est de classe C^1 et vérifie

$$\varphi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\varphi(t).$$

On en déduit que la fonction $\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z}$ est C^1 et a pour dérivée

$$\psi'(t) = \frac{\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} = 0.$$

La fonction ψ est constante. En particulier $\psi(a) = \psi(b)$ mais comme $\gamma(a) = \gamma(b)$ puisque γ est un chemin fermé on en déduit qu'on a bien $\varphi(b) = \varphi(a) = 1$. $\square$

On peut également facilement vérifier que étant donné un chemin fermé γ l'indice est une fonction continue de z.

Proposition 5.6. *Soit γ un chemin fermé d'image Γ et $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Alors la fonction $z \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z)$ est continue sur Ω. Elle est constante sur chaque sous-ensemble connexe par arcs $\tilde{\Omega} \subset \Omega$. Enfin si $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ est connexe par arcs et non borné alors $\mathrm{Ind}(\gamma, z) = 0$ pour tout $z \in \tilde{\Omega}$, en particulier il existe $R > 0$ tel que $\mathrm{Ind}(\gamma, z) = 0$ pour tout $|z| > R$.*

Démonstration. A nouveau on fait la preuve dans le cas où γ est C^1.

L'ensemble Γ est l'image du compact $[a, b]$ par la fonction continue γ donc Γ est compact. En particulier il est fermé donc Ω est ouvert. Soit $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$. La fonction $(t, z) \mapsto \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$ est continue sur $[a, b] \times D(z_0, r)$, le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre garantit que $\mathrm{Ind}(\gamma, z)$ est continue sur $D(z_0, r)$ et en particulier en z_0.

Le fait que $\mathrm{Ind}(\gamma, z)$ soit constant sur tout ensemble $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ connexe par arcs provient alors du fait que cette fonction est continue et à valeurs entières (c'est le même argument qu'on a utilisé dans la Section 3.4).

Si $\tilde{\Omega}$ n'est pas borné il existe $(z_n)_n \in \tilde{\Omega}^{\mathbb{N}}$ telle que $|z_n| \to \infty$. Comme l'image Γ de γ est compacte elle est bornée, il existe $R \geq 0$ tel que $|\gamma(t)| \leq R$ pour tout $t \in [a, b]$. En utilisant la Proposition 5.4 on obtient, pour n assez grand,

$$|\mathrm{Ind}(\gamma, z_n)| \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi} \sup_{t\in[a,b]} \frac{1}{|\gamma(t) - z_n|} \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi} \sup_{t\in[a,b]} \frac{1}{|z_n| - |\gamma(t)|} \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi(|z_n| - R)}.$$

Ainsi, puisque $|z_n| \to \infty$, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Ind}(\gamma, z_n) = 0$ mais comme la fonction $z \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z)$ est constante sur $\tilde{\Omega}$ elle est nulle.

Finalement si R est comme ci-dessus alors $\tilde{\Omega} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > R\}$ est un sous-ensemble connexe par arcs de Ω ce qui prouve le résultat. $\square$

Remarque 5.10. *Etant donné un ouvert Ω on peut montrer que Ω se décompose de façon unique comme une réunion disjointe de domaines, i.e. de sous-ensembles ouverts et connexes par arcs. Ces ensembles sont appelés les composantes connexes de Ω. On peut alors reformuler la proposition ci-dessus en disant que l'indice est constant sur chaque composante connexe de $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Dans le cas présent comme $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > R\} \subset \Omega$ on en déduit qu'il existe une unique composante connexe non-bornée de Ω.*

5.4 Formule de Cauchy - le cas général

On a vu dans le chapitre précédent la formule de Cauchy (4.6) qui relie la valeur d'une fonction C^1 dans un disque aux valeurs de cette fonction sur le bord du disque. Maintenant qu'on sait que toute fonction holomorphe est C^1 (et même analytique) cette formule reste vraie si f est seulement supposée holomorphe. Plus précisément, si f est holomorphe sur $D(z_0, R)$ alors pour tout $0 < r < R$ et tout $z \in D(z_0, r)$ on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right)}{z_0 + r\mathrm{e}^{it} - z} r\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t.$$

On a par ailleurs vu que si $z \notin \overline{D}(z_0, r)$ alors la même intégrale est nulle. Ces intégrales sont en fait des intégrales le long du cercle $C(z_0, r)$. Si on paramètre celui-ci par $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}$ on constate que la formule de Cauchy peut se réécrire de la façon suivante :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w, \quad \forall z \in D(z_0, r),$$

tandis que si $z \notin \overline{D}(z_0, r)$ on a $\displaystyle\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w = 0$. On va voir que cette formule reste vrai dans le cas où on fait l'intégrale le long d'un lacet qui n'est pas forcément un cercle. La distinction z est à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle devient alors z est à l'intérieur ou à l'extérieur du lacet. Si on autorise γ à être un chemin fermé, et pas forcément un lacet, il faudra prendre en compte le nombre de tours faits par γ autour de z, i.e. l'indice $\mathrm{Ind}(\gamma, z)$. La formule de Cauchy jouera un rôle important dans le chapitre suivant, voir le Théorème des residus.

Théorème 5.7. *[Formule de Cauchy] Soit Ω un ouvert étoilé et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. Si γ est un chemin fermé dont l'image est incluse dans Ω et $z_0 \in \Omega$ n'est pas sur l'image de γ alors*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = f(z_0) \times \mathrm{Ind}(\gamma, z_0). \tag{5.4}$$

Démonstration. On décompose $f(z) = f(z) - f(z_0) + f(z_0)$. On a alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z + \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z + f(z_0) \times \mathrm{Ind}(\gamma, z_0).$$

Il reste donc à montrer que $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 0$.

Soit $g : \Omega \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ si $z \neq z_0$ et $g(z_0) = f'(z_0)$. La fonction g est holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$. On va montrer que g est aussi dérivable en z_0. Ainsi g sera holomorphe sur l'ouvert étoilé Ω et donc d'après leThéorème 5.4 on aura bien

$$\int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Puisque f est holomorphe elle est analytique. Il existe donc $r > 0$ et $(c_n)_n$ tels que pour tout $z \in D(z_0, r)$ on ait $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ avec $c_0 = f(z_0)$ et $c_1 = f'(z_0)$. On a donc, pour tout $z \in D(z_0, r)$ avec $z \neq z_0$, $g(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n-1}$. Par définition de $g(z_0)$ cela reste vrai en $z = z_0$. Conclusion : la fonction g est DSE en z_0 et donc y est bien dérivable. □

La formule de Cauchy se généralise pour obtenir les dérivées de la fonction f à l'aide des valeurs de f le long d'un lacet. On a en effet vu, voir (4.3), que si f est analytique sur $D(z_0, R)$ alors pour tout $r < R$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t.$$

En termes d'intégrales de chemin cela s'écrit

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

De façon plus générale on montre

Proposition 5.7. *[Formule de Cauchy] Soit Ω un ouvert étoilé et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. Si γ est un chemin fermé dont l'image est incluse dans Ω et $z_0 \in \Omega$ n'est pas sur l'image de γ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$\frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z = f^{(n)}(z_0) \times \mathrm{Ind}(\gamma, z_0). \tag{5.5}$$

5.5 Compléments : suites et séries de fonctions holomorphes, fonctions définies par une intégrale

Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues définies sur $\Omega \subset \mathbb{C}$ et qu'elle converge uniformément vers f alors f est continue (voir la Section 3.1). Si on suppose de plus que les f_n sont holomorphes (avec Ω ouvert) on voudrait savoir si f est aussi holomorphe. Lorsque les fonctions sont à variables réelles vous avez vu en L2 qu'il fallait pour cela une condition de convergence uniforme sur la suite des fonctions dérivées, i.e. sur $(f_n')_n$, et qu'on avait alors $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$. Pour les fonctions holomorphes ce n'est en fait pas nécessaire. On voit donc ici une autre manifestation de la "rigidité" des fonctions holomorphes.

Théorème 5.8. *Soit Ω un ouvert et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que $(f_n)_n$ converge vers f uniformément sur tout compact $K \subset \Omega$. Alors f est holomorphe sur Ω.*

Remarque 5.11. *On peut également démontrer que la suite $(f_n')_n$ converge alors uniformément vers f' sur tout compact $K \subset \Omega$, et donc par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$ la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément vers $f^{(k)}$ sur tout compact $K \subset \Omega$.*

Remarque 5.12. *L'hypothèse de convergence uniforme sur tout compact $K \subset \Omega$ est plus faible que celle de convergence uniforme sur Ω. On a déjà rencontré ce type de situations pour les séries entières : si le rayon de convergence est $R > 0$ alors il y a convergence normale (et donc uniforme) sur tout disque $\overline{D}(0, r)$ avec $r < R$. Cela ne garantit pas la convergence uniforme sur Ω tout entier. Par contre c'est suffisant pour garantir que la fonction limite f est continue. En effet la convergence uniforme garantit que f est continue sur tout compact $K \subset \Omega$. Si $z_0 \in \Omega$, puisque Ω est ouvert il existe $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ et comme $\overline{D}(z_0, r)$ est compact la fonction f est continue sur cet ensemble et en particulier en z_0. On a ainsi montré que f est continue en tout $z_0 \in \Omega$, i.e. f est continue sur Ω.*

Démonstration. On peut déjà affirmer que f est continue sur Ω (voir la remarque ci-dessus). On va maintenant montrer que f est holomorphe. La preuve repose sur le théorème de Goursat et sa "réciproque" le théorème de Morera. Soit donc $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$. On va montrer que f est holomorphe sur $D(z_0, r)$ et donc en particulier en z_0. D'après le théorème de Morera, puisque f est continue il suffit de montrer pour tous $a, b, c \in D(z_0, r)$ on a $\displaystyle\int_{\partial T(a,b,c)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Soit donc $a, b, c \in D(z_0, r)$. Par hypothèse toutes les fonctions f_n sont holomorphes sur $D(z_0, r)$ donc d'après le théorème de Goursat on a $\displaystyle\int_{\partial T(a,b,c)} f_n(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Or la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\overline{D}(z_0, r)$ et donc en particulier sur $\partial T(a, b, c) \subset \overline{D}(z_0, r)$. On peut donc intervertir limite et intégrale et ainsi

$$\int_{\partial T(a,b,c)} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial T(a,b,c)} f_n(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

□

En appliquant le théorème précédent à la suite des sommes partielles on obtient immédiatement la version suivante pour les séries de fonctions holomorphes.

Théorème 5.9. *Soit Ω un ouvert et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que $\sum f_n$ converge vers f uniformément sur tout compact $K \subset \Omega$. Alors f est holomorphe sur Ω.*

Remarque 5.13. *Dans la pratique pour montrer la convergence uniforme on peut bien entendu montrer la convergence normale.*

Exemple 5.9. *Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$. Pour tout $n \geq 1$ on note $f_n(z) = \dfrac{1}{n^z} = \mathrm{e}^{-z\ln(n)}$. Les fonctions f_n sont bien toutes holomorphes sur Ω (et même sur $\mathbb{C}$ tout entier). De plus, si $\alpha > 1$ alors pour tout z tel que $\mathrm{Re}(z) > \alpha$ on a $|f_n(z)| = \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(z)\ln(n)} \leq \frac{1}{n^\alpha}$. Comme la série*

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *converge cela garantit que la série* $\sum f_n$ *converge normalement, et donc uniformément, sur* $\Omega_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > \alpha\}$. *Sa somme* $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ *est donc holomorphe sur* Ω_α, *et comme c'est vrai pour tout* $\alpha > 1$, *elle est holomorphe sur tout* Ω.

Cette fonction est appelée fonction zeta de Riemann et joue un rôle très important en mathématiques, en particulier en théorie des nombres.

Un autre type de fonctions que l'on rencontre fréquemment sont les fonctions définies par une intégrale, i.e. de la forme $F(z) = \int_I f(t,z)\,\mathrm{d}t$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Vous avez vu en L2 que si la fonction f était continue par morceaux par rapport à t, i.e. pour tout x la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue par morceaux, qu'elle était continue par rapport à x, i.e. pour tout t la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est continue, et qu'on pouvait "dominer" $f(t,x)$ par une fonction $g(t)$ intégrable, i.e. il existe $g : I \to \mathbb{R}$ telle que $|f(t,x)| \leq g(t)$ pour tous t, x et $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors la fonction définie par $F(x) = \int_I f(t,x)$ était continue. Ici encore si on veut montrer que F est dérivable, en plus de $f(t,x)$ dérivable par rapport à x, il faut donner une hypothèse sur la dérivée de f, en l'occurence une hypothèse de domination sur $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et pas sur f. Lorsqu'on considère les fonctions holomorphes ce n'est pas nécessaire et la domination sur f suffit. Plus précisément on a le théorème suivant.

Théorème 5.10. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un ouvert,* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle et* $f : I \times \Omega \to \mathbb{C}$ *une fonction. On suppose que*

1. *pour tout* $t \in I$ *la fonction* $\Omega \ni z \mapsto f(t,z)$ *est holomorphe,*
2. *pour tout* $z \in \Omega$ *la fonction* $I \ni t \mapsto f(t,z)$ *est continue par morceaux,*
3. *pour tout compact* $K \subset \Omega$ *il existe* $g : I \to \mathbb{R}$ *continue par morceaux telle que* $|f(t,z)| \leq g(t)$ *pour tout* $(t,z) \in I \times \Omega$ *et* $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

Alors pour tout $z \in \Omega$ *l'intégrale* $\displaystyle\int_I f(t,z)\,\mathrm{d}t$ *converge et la fonction définie sur* Ω *par* $F(z) = \displaystyle\int_I f(t,z)\,\mathrm{d}t$ *est holomorphe et vérifie* $F'(z) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial z}(t,z)\,\mathrm{d}t$ *où* $\dfrac{\partial f}{\partial z}(t,z)$ *désigne la dérivée de la fonction* $z \mapsto f(t,z)$.

Remarque 5.14. *Maintenant que vous avez suivi le cours de théorie de la mesure, et donc l'intégrale de Lebesgue, vous pouvez bien entendu remplacer les hypothèses "*$I \ni t \mapsto f(t,z)$ *est continue par morceaux" et "*$g : I \to \mathbb{R}$ *coninue par morceaux" par "*$I \ni t \mapsto f(t,z)$ *est mesurable" et "*g *mesurable".*

Exemple 5.10. *Soit* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ *et* $I =]0, +\infty[$. *On considère la fonction définie sur* $I \times \Omega$ *par* $f(t,z) = t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}$ *où* $t^{z-1} = \mathrm{e}^{(z-1)\ln(t)}$. *On vérifie facilement que pour tout* z *la fonction* $t \mapsto f(t,z)$ *est continue sur* I *et que pour tout* $t > 0$ *la fonction* $z \mapsto f(t,z)$ *est holomorphe sur* Ω *(et même sur* $\mathbb{C}$ *tout entier). De plus, si* $0 < \alpha < \beta$, *pour tout* z *tel que* $\alpha \leq \mathrm{Re}(z) \leq \beta$ *on a*

$$|f(t,z)| = \mathrm{e}^{(\mathrm{Re}(z)-1)\ln(t)}\mathrm{e}^{-t} \leq \begin{cases} \mathrm{e}^{(\alpha-1)\ln(t)}\mathrm{e}^{-t} = t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}, & si\ t \leq 1, \\ \mathrm{e}^{(\beta-1)\ln(t)}\mathrm{e}^{-t} = t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-t}, & si\ t > 1. \end{cases}$$

La fonction g *définie par* $g(t) = \begin{cases} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}, & si\ t \leq 1, \\ t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-t}, & si\ t > 1, \end{cases}$ *est continue par morceaux et* $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ *converge. En effet, en* 0 *on a* $g(t) \sim t^{\alpha-1}$ *et comme* $\alpha - 1 > -1$ *l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}\mathrm{d}t$ *converge.*

Et en $+\infty$ *on a* $g(t) = t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-t} = t^{-2}\times t^{\beta+1}\mathrm{e}^{-t} = o(t^{-2})$ *puisque* $\lim_{t\to+\infty} t^{\beta+1}\mathrm{e}^{-t} = 0$ *(croissances comparées), et donc* $\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

On en déduit que $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ *définit une fonction holomorphe sur tout ensemble* $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \alpha \leq \mathrm{Re}(z) \leq \beta\}$ *et donc sur* Ω*. Cette fonction est appelée fonction Gamma.*

CHAPITRE 6

FONCTIONS MÉROMORPHES

On va s'intéresser enfin aux fonctions qui sont holomorphes sauf peut-être en certains points. L'exemple le plus simple est la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ qui est holomorphe sauf en $z = 0$. On a vu qu'une des conséquences était que l'intégrale de f le long d'un lacet n'était pas forcément nulle. Par exemple si $r > 0$ on a $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2i\pi$. Le fait que la fonction f ne soit pas holomorphe en 0 n'explique pas tout. En effet la fonction $g(z) = \frac{1}{z^2}$ est également holomorphe sauf en 0. Cependant l'intégrale de g le long de n'importe quel lacet est nulle puisque g admet une primitive sur $\mathbb{C}^*$. Prenons un dernier exemple, la fonction $h(z) = \frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}$. Elle est holomorphe sauf en $z = 0$ et $z = 1$. Pour n'importe quel lacet γ ne passant pas par 0 ou 1 on a donc

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2(z-1)} = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-1} - \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} - \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2}.$$

Puisque $\frac{1}{z^2}$ admet une primitive sur $\mathbb{C}$ la dernière intégrale est nulle. Les deux autres dépendent de la position de $z = 0$ et $z = 1$ par rapport au chemin γ et se calculent à l'aide de la formule de Cauchy (5.4). On a ainsi

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2(z-1)} = 2i\pi\mathrm{Ind}(\gamma, 1) - 2i\pi\mathrm{Ind}(\gamma, 0).$$

C'est en particulier ce genre de formules qu'on va chercher à généraliser, c'est ce qu'on appellera le théorème des résidus.

6.1 Singularités isolées

Définition 6.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $z_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. On dit que z_0 est une singularité isolée de f si f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$.*

On va voir qu'on pourra classer les singularités en trois catégories. Les exemples ci-dessous sont caractéristiques de chacune de ces catégories.

Exemple 6.1. *1) $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ est définie et holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Elle se prolonge en fait en une fonction holomorphe à $\mathbb{C}$ tout entier en posant $f(0) = 1$. En effet, par définition de la* *fonction sinus pour tout* $z \neq 0$ *on a* $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$ *et cela reste vrai pour* $z = 0$*. La fonction* f *est donc DSE en* $z = 0$ *et donc aussi holomorphe en* 0*.*

2) $g(z) = \dfrac{z^4 + 2z^3 - z + 3}{z^3 - 2z^2 + z} = \dfrac{z^4 + 2z^3 - z + 3}{z(z-1)^2}$*. La fonction* g *est définie et holomorphe sur* $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$*. On voit qu'on ne peut pas prolonger* g *ni en* 0 *ni en* 1 *(même en étant moins "exigeant" et en ne cherchant qu'un prolongement par continuité on ne pourrait pas). Par contre on observe qu'on peut prolonger en* $z = 0$ *la fonction* $zg(z)$ *et en* $z = 1$ *la fonction* $(z-1)^2 g(z)$*. Pour* $z_0 \in \{0,1\}$ *on peut prolonger non pas* g *en* z_0 *de façon holomorphe mais on peut prolonger une fonction de la forme* $(z-z_0)^n g(z)$ *(il suffit de prendre* $n = 1$ *en* $z_0 = 0$ *et* $n = 2$ *en* $z_0 = 1$*). On peut remarquer que* $\lim\limits_{z \to z_0} |g(z)| = +\infty$ *que ce soit en* $z_0 = 0$ *ou en* $z_0 = 1$*.*

3) $h(z) = \exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$*. La fonction* h *est définie et holomorphe sur* $\mathbb{C}^*$*. Par contre, quel que soit l'entier* $n \in \mathbb{N}$ *on ne peut pas prolonger la fonction* $z^n h(z)$ *de façon holomorphe en* 0*. En effet pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n h(x) = +\infty$ *donc on ne peut même pas prolonger la fonction* $z^n h(z)$ *par continuité en* 0*.*

Si on regarde le comportement de la fonction h *lorsque* $z \to 0$ *on peut voir qu'il est très différent du cas précédent. En effet,* $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$*,* $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = 0$ *et sur l'axe imaginaire la fonction* h *est bornée. En effet, si* $z = iy$ *avec* $y \in \mathbb{R}^*$*, on a* $|h(iy)| = \left|\exp\left(\frac{1}{iy}\right)\right| = 1$*.*

Définition 6.2. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un ouvert,* $z_0 \in \Omega$ *et* $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ *telle que* z_0 *est une singularité isolée de* f*. On dit que* z_0 *est*

1. *une singularité* artificielle *de* f *si* f *peut être prolongée en une fonction holomorphe sur* Ω*.*
2. *un* pôle *si* z_0 *n'est pas une singularité artificielle de* f *et s'il existe* $m \in \mathbb{N}^*$ *tel que la fonction* $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$ *se prolonge en une fonction holomorphe sur* Ω*, autrement dit si* z_0 *est une singularité artificielle de la fonction* g*. Le plus petit entier* m *tel que* $(z-z_0)^m f(z)$ *ait une singularité artificielle en* z_0 *est appelé l'*ordre du pôle*.*
3. *une singularité* essentielle *sinon.*

Remarque 6.1. *La définition de l'ordre d'un pôle est à rapprocher de celle de l'ordre d'un zéro d'une fonction holomorphe non-nulle, voir la Définition 4.3.*

Si z_0 est une singularité artificielle alors la fonction f admet une limite en z_0 et en particulier elle est bornée au voisinage de z_0. A contrario si z_0 est un pôle d'ordre m on peut écrire $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ avec g holomorphe et donc en particulier $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$. Ces deux propriétés caractérisent en fait les singularités artificielles et les pôles.

Par ailleurs, comme une fonction holomorphe est analytique, si z_0 est un pôle d'ordre m de f et $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$ alors il existe $(b_k)_k$ et $R > 0$ tel que sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on a

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k \quad \Longleftrightarrow \quad f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^{k-m}.$$

Si pour tout $n \geq -m$ on note $a_n = b_{n+m}$, i.e. $b_k = a_{k-m}$, on a alors

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m}(z-z_0)^{k-m} = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{j=1}^{m} \frac{a_{-j}}{(z-z_0)^j} + h(z) \tag{6.1}$$

où $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ est holomorphe sur $D(z_0, R)$.

Théorème 6.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $z_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ telle que z_0 est une singularité isolée de f. Alors*

1. *z_0 est une singularité artificielle si et seulement si f est bornée au voisinage de z_0.*
2. *z_0 est un pôle si et seulement si $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$.*

Démonstration. Dans les deux cas la condition nécessaire correspond à ce qui a été dit avant l'énoncé du théorème. On montre que ce sont bien aussi des conditions suffisantes.

1. On suppose que f est bornée au voisinage de z_0, i.e. il existe $M \geq 0$ et $R > 0$ tel que pour tout $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on a $|f(z)| \leq M$. Soit g la fonction définie sur Ω par $g(z) = (z-z_0)^2 f(z)$ si $z \neq z_0$ et $g(z_0) = 0$. La fonction g est holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$. De plus comme f est bornée au voisinage de z_0 on vérifie facilement que

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = (z-z_0) f(z) \xrightarrow{z\to z_0} 0.$$

Ainsi la fonction g est holomorphe sur Ω. Elle est donc analytique, en particulier DSE en z_0 avec $g(z_0) = g'(z_0) = 0$. D'après la Proposition 4.1 il existe donc $r > 0$ tel que sur $D(z_0, r)$ on a

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

et donc sur $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ on a

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(z-z_0)^n.$$

Si on pose $f(z_0) = a_2$ l'identité ci-dessus est valable sur $D(z_0, r)$, la fonction f est donc prolongeable en z_0 en une fonction DSE et en particulier y est dérivable.

2. On suppose cette fois que $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$. Il existe donc $R > 0$ tel que pour tout $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on a $|f(z)| \geq 1$. La fonction $\frac{1}{f}$ est donc holomorphe bornée sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$. D'après 1. z_0 est donc une singularité artificielle de $\frac{1}{f}$ qui se prolonge ainsi en une fonction holomorphe, et donc analytique, sur $D(z_0, R)$. On note g ce prolongement et puisque $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$ on en déduit que $g(z_0) = 0$. Puisque g n'est pas nulle (c'est $\frac{1}{f}$), d'après la Proposition 4.4 il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^{(n)}(z_0) \neq 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier tel que $g^{(n_0)}(z_0) \neq 0$. Ainsi il existe $0 < r < R$ tel que sur $D(z_0, r)$ on ait

$$g(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = (z-z_0)^{n_0} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_0+k}(z-z_0)^k}_{=:h(z)}$$

La fonction h est holomorphe sur $D(z_0, r)$ et ne s'y annule pas (g ne s'annule qu'en z_0 et $h(z_0) = a_{n_0} \neq 0$). Donc $\frac{1}{h}$ y est aussi holomorphe et pour tout $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ on a

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^{n_0} h(z) \Leftrightarrow (z - z_0)^{n_0} f(z) = \frac{1}{h(z)},$$

ce qui prouve que z_0 est bien un pôle (d'ordre n_0). □

Remarque 6.2. *Si z_0 est une singularité essentielle le comportement de f au voisinage de z_0 est plus compliqué, f n'est pas bornée mais ne tend pas non plus vers l'infini. Si on reprend la fonction $h(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ elle n'est ni bornée, puisqu'elle tend vers $+\infty$ si z tend vers 0 en étant réel positif, ni ne tend vers l'infini (en module) puisqu'elle est bornée sur l'axe imaginaire.*

Dans l'étude des singularités on rencontre souvent le cas suivant.

Proposition 6.1. *Soient $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphes avec g non-nulle, et soit z_0 un zéro de g. Alors il existe $R > 0$ tel que $\frac{f}{g}$ soit définie sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$. On note n_g l'ordre de z_0 en tant que zéro de g et n_f son ordre en tant que zéro de f (avec $n_f = 0$ si $f(z_0) \neq 0$).*

- *Si $n_f \geq n_g$ alors z_0 est une singularité artificielle de $\frac{f}{g}$ et z_0 est un zéro d'ordre $n_f - n_g$ du prolongement de $\frac{f}{g}$ (ce n'est pas un zéro si $n_f = n_g$).*
- *Si $n_f < n_g$ alors z_0 est un pôle d'ordre $n_g - n_f$ de $\frac{f}{g}$.*

Démonstration. Par définition de l'ordre d'un zéro on peut écrire

$$f(z) = (z - z_0)^{n_f} \tilde{f}(z) \quad \text{et} \quad g(z) = (z - z_0)^{n_g} \tilde{g}(z)$$

avec $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ holomorphes telles que $\tilde{f}(z_0) \neq 0$ et $\tilde{g}(z_0) \neq 0$. Par continuité de $\tilde{g}$ il existe $R > 0$ tel que $\tilde{g}(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(z_0, R)$. Sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on a donc

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{n_f - n_g} h(z)$$

avec $h = \frac{\tilde{f}}{\tilde{g}}$ holomorphe et $h(z_0) \neq 0$. Le résultat découle alors de la Définition 6.2 et de celle de l'ordre d'un zéro. □

6.2 Fonctions méromorphes et résidus

Définition 6.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction f est dite* méromorphe *sur Ω s'il existe une partie discrète $\mathcal{P} \subset \Omega$ telle que f soit holomorphe sur $\Omega \setminus \mathcal{P}$ et admette un pôle en tout $z \in \mathcal{P}$. L'ensemble $\mathcal{P}$ est appelé l'ensemble des pôles de f.*

Exemple 6.2. *Si P, Q sont deux fonctions polynomiales avec $Q \neq 0$ alors $f = \dfrac{P}{Q}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$ est inclus dans l'ensemble des zéros de Q (qui est un ensemble fini donc discret). Si de plus P et Q sont premiers entre eux alors $\mathcal{P}$ est exactement l'ensemble des zéros de Q et l'ordre de multiplicité d'un pôle $z_0 \in \mathcal{P}$ est égal à l'ordre de multiplicité de z_0 en tant que zéro de Q.*

Le résultat suivant généralise le cas des fractions rationnelles (quotient de polynômes) et découle directement de la Proposition 6.1.

Proposition 6.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphes avec $g \neq 0$. Alors $\frac{f}{g}$ est méromorphe sur Ω et l'ensemble des pôles de $\frac{f}{g}$ est inclus dans l'ensemble des zéros de g.*

Démonstration. La seule chose à prouver est que l'ensemble $\mathcal{P}$ des pôles est bien discret. C'est une conséquence immédiate du principe des zéros isolés. □

Proposition 6.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et f, g deux fonctions méromorphes sur Ω. Alors les fonctions $f+g$, fg et f' sont méromorphes sur Ω. Le quotient $\frac{f}{g}$ est méromorphe sur tout ouvert $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ sur lequel g n'est pas identiquement nulle.*

Démonstration. Soit $\mathcal{P}_f$, resp. $\mathcal{P}_g$, l'ensemble des pôles de f, resp. de g. L'ensemble $\mathcal{P} = \mathcal{P}_f \cup \mathcal{P}_g$ est un ensemble discret et sur $\Omega \setminus \mathcal{P}$ les fonctions $f+g$, fg et f' sont holomorphes comme somme, produit ou dérivée de fonctions holomorphes.

Si $z_0 \in \mathcal{P}$, il existe n_f et n_g (les ordres de z_0 en tant que pôle de f et g avec $n_f = 0$ si z_0 n'est pas un pôle de f et $n_g = 0$ si ce n'est pas un pôle de g) tels que $\tilde{f}(z) = (z - z_0)^{n_f} f(z)$ et $\tilde{g}(z) = (z - z_0)^{n_g} g(z)$ se prolongent en fonctions holomorphes sur un disque $D(z_0, R)$. On peut alors écrire, sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$, avec $n = \max(n_f, n_g)$

$$\begin{aligned}
(f+g)(z) &= \frac{(z-z_0)^{n-n_f}\tilde{f}(z) + (z-z_0)^{n-n_g}\tilde{g}(z)}{(z-z_0)^n}, \\
(fg)(z) &= \frac{\tilde{f}(z)\tilde{g}(z)}{(z-z_0)^{n_f+n_g}}, \\
f'(z) &= \frac{(z-z_0)\tilde{f}'(z) - n_f \tilde{f}(z)}{(z-z_0)^{n_f+1}}.
\end{aligned}$$

Pour chacune des ces fonctions le numérateur se prolonge en une fonction holomorphe en z_0 ce qui prouve que z_0 est soit une singularité artificielle soit un pôle.

Finalement, si $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ est connexe par arcs et g est non-nulle sur $\tilde{\Omega}$ alors l'ensemble Z des zéros de g sur $\tilde{\Omega}$ est un ensemble discret d'après le principe des zéros isolés. L'ensemble $\tilde{P} = (\mathcal{P} \cap \tilde{\Omega}) \cup Z$ est donc une partie discrète de $\tilde{\Omega}$ et la fonction $\frac{1}{g}$ est holomorphe sur $\tilde{\Omega} \setminus \tilde{P}$. Si $z_0 \in \tilde{P}$ est un zéro d'ordre m de g alors, d'après la Proposition 6.1, c'est un pôle d'ordre m de $\frac{1}{g}$ et si z_0 est un pôle d'ordre m de g alors $\frac{1}{g}$ admet une singularité artificielle en z_0, et z_0 est même un zéro d'ordre m du prolongement. La fonction $\frac{1}{g}$ est donc méromorphe sur $\tilde{\Omega}$ et par produit la fonction $\frac{f}{g}$ aussi. □

On a vu dans le chapitre précédent que si f est une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé Ω alors l'intégrale de f le long d'un lacet est nulle. On voudrait voir ce qu'il se passe si on remplace f holomorphe par f méromorphe. La formule de Cauchy assure par exemple que si $z_0 \in \Omega$ alors pour tout lacet γ ne passant pas par z_0 on a

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z = 2i\pi f(z_0) \mathrm{Ind}(\gamma, z_0).$$

La fonction $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ est méromorphe sur Ω avec, sauf si $f(z_0) = 0$, un pôle simple en z_0. Que se passe-t-il si on divise maintenant par $(z - z_0)^n$, i.e. si on considère un pôle d'ordre plus élevé ? Et s'il y a plusieurs pôles ?

Supposons d'abord que f soit méromorphe sur un ouvert étoilé Ω et qu'elle ait un unique pôle en z_0, d'ordre m. On a vu dans la section précédente, voir l'équation (6.1), que dans un disque $D(z_0,R)\setminus\{z_0\}$ on pouvait écrire f sous la forme

$$f(z)=\sum_{j=1}^{m}\frac{a_{-j}}{(z-z_0)^j}+h(z)$$

avec h holomorphe sur $D(z_0,R)$. Puisque la fonction $g(z)=\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{a_{-j}}{(z-z_0)^j}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ et qu'on a supposé que z_0 était le seul pôle de f cela prouve que $h(z)=f(z)-g(z)$ est en fait holomorphe sur tout Ω. Si on prend un lacet γ dont l'image est dans Ω et qui ne passe pas par z_0 on peut alors écrire

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{j=1}^{m}\int_\gamma\frac{a_{-j}}{(z-z_0)^j}\,\mathrm{d}z+\int_\gamma h(z)\,\mathrm{d}z\\ &= \sum_{j=1}^{m}a_{-j}\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^j}\\ &= 2i\pi a_{-1}\mathrm{Ind}(\gamma,z_0).\end{aligned}$$

où on a utilisé à la dernière ligne la définition de l'indice et le fait que si $j>1$ la fonction $\dfrac{1}{(z-z_0)^j}$ a une primitive et donc son intégrale le long d'un lacet est nulle. On voit que seule le terme $\dfrac{a_{-1}}{z-z_0}$ a une contribution non nulle à l'intégrale et que c'est le coefficient a_{-1} qui joue un rôle clé dans la valeur de cette dernière.

Définition 6.4. *Soit Ω un ouvert et f une fonction méromorphe sur Ω. Si $z_0\in\Omega$ est un pôle de f et $R>0$ tel que dans $D(z_0,R)\setminus\{z_0\}$ on décompose f sous la forme $f(z)=\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{a_{-j}}{(z-z_0)^j}+h(z)$ avec h holomorphe sur $D(z_0,R)$, alors la fonction $g(z)=\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{a_{-j}}{(z-z_0)^j}$ s'appelle la* partie principale *de f en z_0 et le coefficient a_{-1} s'appelle le* résidu *de f en z_0 et on le note $\mathrm{Res}(f,z_0)$.*

Remarque 6.3. *Si z_0 est une singularité artificielle de f, i.e. si f se prolonge en une fonction holomorphe en z_0, on notera parfois $\mathrm{Res}(f,z_0)=0$.*

Si une fonction méromorphe f a plusieurs pôles on peut bien sûr s'attendre à ce que les différents pôles apportent chacun une contribution. C'est ce qu'on a pu observer dans l'exemple introductif en début de chapitre. Le théorème qui suit généralise le calcul précédent au cas d'une fonction méromorphe quelconque, i.e. avec un nombre arbitraire de pôles.

Théorème 6.2. *[Théorème des résidus] Soit Ω un ouvert étoilé et f une fonction méromorphe sur Ω. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de f. Pour tout lacet γ inclus dans Ω et ne passant pas par $\mathcal{P}$ on a*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{z\in\mathcal{P}}\mathrm{Res}(f,z)\mathrm{Ind}(\gamma,z).\tag{6.2}$$

La somme dans le membre de droite converge dans le sens où il n'y a qu'un nombre fini de termes non-nuls.

Démonstration. On va d'abord supposer que $\mathcal{P}$ est un ensemble fini (non-vide sinon f est holomorphe et le résultat est celui du Théorème 5.4). On verra dans un second temps comment se ramener à ce cas là.

Soient $z_1, \ldots, z_p$ les pôles de f. On notera m_j l'ordre du pôle z_j. Pour tout $j \in \{1, \ldots, , p\}$ il existe $R_j > 0$ et $a_{-1,j}, \ldots, a_{-m_j,j} \in \mathbb{C}$ tels que sur $D(z_j, R_j) \setminus \{z_j\}$ la fonction

$$h_j(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{k,j}}{(z-z_j)^k}$$

se prolonge de façon holomorphe en z_j. On considère la fonction $g : \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_p\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{k,j}}{(z-z_j)^k}.$$

La fonction g est holomorphe (somme de fonctions holomorphes). De plus, étant donné $\ell \in \{1, \ldots, p\}$, si $z \in D(z_\ell, R_\ell) \setminus \{z_\ell\}$ on a alors

$$g(z) = h_\ell(z) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{p} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{k,j}}{(z-z_j)^k}.$$

Comme h_ℓ se prolonge de façon holomorphe en z_ℓ ce dernier est donc une singularité artificielle de g. C'est vrai pour tout ℓ et donc la fonction g se prolonge de façon holomorphe sur Ω tout entier. On notera toujours g ce prolongement. Ainsi on a montré qu'il existe $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{k,j}}{(z-z_j)^k}.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{m_j} \int_\gamma \frac{a_{k,j}}{(z-z_j)^k}\,\mathrm{d}z \\ &= \sum_{j=1}^{p} \int_\gamma \frac{a_{-1,j}}{z-z_j}\,\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

où on a utilisé que g est holomorphe, donc son intégrale le long d'un lacet est nulle, et que toutes les fonctions $\frac{1}{(z-z_j)^k}$ pour $k \geq 2$ ont des primitives et donc leur intégrale le long d'un lacet est nulle également. Finalement par définition de l'indice on a $\displaystyle\int_\gamma \frac{a_{-1,j}}{z-z_j}\,\mathrm{d}z = 2i\pi \mathrm{Ind}(\gamma, z_j)$ et par définition du résidu on a $a_{-1,j} = \mathrm{Res}(f, z_j)$. On a donc bien

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \sum_{j=1}^{p} \mathrm{Res}(f, z_j)\mathrm{Ind}(\gamma, z_j) \;=\; \sum_{z \in \mathcal{P}} \mathrm{Res}(f, z)\mathrm{Ind}(\gamma, z).$$

On ne suppose plus maintenant que $\mathcal{P}$ est fini. On commence par justifier qu'il n'y a cependant bien qu'un nombre fini de termes non nuls dans le membre de droite de (6.2).

Comme γ est un lacet son image est l'image d'un segment (compact) $[a,b]$ par une fonction continue donc son image est bornée. Soit $M \geq 0$ tel que γ soit inclus dans $D(0,M)$. Si $z \notin \overline{D}(0,M)$ on a donc z qui est à l'extérieur du lacet γ et donc $\mathrm{Ind}(\gamma,z)=0$. Comme $\mathcal{P}$ est discret il ne possède qu'un nombre fini d'éléments dans l'ensemble compact $\overline{D}(0,M)$ et donc $\mathrm{Ind}(\gamma,z)=0$ pour tout $z\in\mathcal{P}$ sauf un nombre fini d'entre eux. Il reste à montrer que (6.2) reste vraie.

L'ensemble Ω est étoilé. Soit z_0 tel que Ω soit étoilé par rapport à z_0. Quitte à augmenter M on peut supposer que $z_0 \in D(0,M)$. Ainsi par construction l'ensemble $\tilde{\Omega} = \Omega \cap D(0,M)$ est étoilé (toujours par rapport à z_0), l'image de γ est incluse dans $\tilde{\Omega}$ et f n'a qu'un nombre fini de pôles dans $\tilde{\Omega}$. On peut donc appliquer la première partie de la preuve à la fonction méromorphe f restreinte à l'ensemble $\tilde{\Omega}$. On a donc

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{z\in\mathcal{P}\cap\tilde{\Omega}} \mathrm{Res}(f,z)\mathrm{Ind}(\gamma,z).$$

Comme pour tout $z\notin\tilde{\Omega}$ le point z est à l'extérieur du lacet γ, si $z\in\mathcal{P}\cap\tilde{\Omega}^c$ on a $\mathrm{Ind}(\gamma,z)=0$ et donc

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{z\in\mathcal{P}\cap\tilde{\Omega}} \mathrm{Res}(f,z)\mathrm{Ind}(\gamma,z) + \sum_{z\in\mathcal{P}\cap\tilde{\Omega}^c} \mathrm{Res}(f,z)\mathrm{Ind}(\gamma,z) = \sum_{z\in\mathcal{P}} \mathrm{Res}(f,z)\mathrm{Ind}(\gamma,z).$$

□

Avant de donner des exemples d'application de ce théorème on va s'intéresser à la question du calcul des résidus. L'indice d'un point par rapport à un lacet correspond au nombre de tours, comptés algébriquement, que fait le lacet autour du point et est donc facile à trouver dans la pratique. Mais pour calculer le résidu il faut a priori pouvoir trouver le coefficient en $\dfrac{1}{z-z_j}$ de chaque pôle de f. La proposition suivante permet de trouver facilement ces résidus dans un grand nombre de cas.

Proposition 6.4. *Soit Ω un ouvert, f méromorphe sur Ω et z_0 un pôle de f.*

1. *Si z_0 est un pôle simple de f alors* $\mathrm{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.
2. *Si z_0 est un pôle d'ordre $m\geq 1$ de f alors* $\mathrm{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}g^{(m-1)}(z)$ *où* $g(z)=(z-z_0)^m f(z)$.
3. *Si $f=\dfrac{g}{h}$ sur $D(z_0,R)\setminus\{z_0\}$ avec g,h holomorphes sur $D(z_0,R)$ et telles que z_0 est un zéro d'ordre 1 de h alors* $\mathrm{Res}(f,z_0) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

Démonstration. 1. Si z_0 est un pôle simple de f on peut écrire, voir (6.1), $f(z)=\dfrac{a_{-1}}{z-z_0}+h(z)$ avec h holomorphe. Ainsi on a facilement

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0}\big(a_{-1}+(z-z_0)h(z)\big) = a_{-1} = \mathrm{Res}(f,z_0).$$

2. Le raisonnement est le même que ci-dessus. D'après (6.1) on peut écrire

$$f(z)=\sum_{j=1}^m \frac{a_{-j}}{(z-z_0)^j}+h(z) \iff g(z)=(z-z_0)^m f(z) = \sum_{j=1}^m a_{-j}(z-z_0)^{m-j}+(z-z_0)^m h(z).$$

La fonction h est holomorphe donc on écrivant, dans un disque centré en z_0, $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k$ on a

$$g(z) = \sum_{j=1}^{m} a_{-j}(z-z_0)^{m-j} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^{k+m} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

avec $c_n = a_{n-m}$ si $n < m$ et $c_n = b_{n-m}$ si $n \geq m$. La fonction g se prolonge bien en une fonction holomorphe en z_0. Si on note toujours g ce prolongement en utilisant le Corolllaire 3.1 on a donc

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = c_{m-1} = a_{-1} = \mathrm{Res}(f, z_0).$$

3. Puisque z_0 est un zéro d'ordre 1 de h on a $h'(z_0) \neq 0$. Soit z_0 est aussi un zéro de g, i.e. $g(z_0) = 0$, et alors d'après la Proposition 6.1 z_0 est une singularité artificielle de f. Ainsi son résidu en z_0 est nul et on a bien $\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$. Si $g(z_0) \neq 0$ alors z_0 est un pôle simple de f donc d'après 1. on a $\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$. Mais pour tout $z \neq z_0$ on peut écrire

$$(z-z_0)f(z) = g(z) \times \frac{z-z_0}{h(z)} = g(z) \times \frac{z-z_0}{h(z)-h(z_0)}.$$

Comme g est holomorphe elle est continue en z_0 donc $\lim_{z\to z_0} g(z) = g(z_0)$. Enfin h est holomorphe en z_0 et $h'(z_0) \neq 0$ donc on a $\lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{h(z)-h(z_0)} = \frac{1}{h'(z_0)}$ et finalement

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} g(z) \times \frac{z-z_0}{h(z)-h(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

□

Application au calcul d'intégrales. On termine cette section avec une application du théorème des résidus au calcul de certaines intégrales dans $\mathbb{R}$: comme souvent le passage par les nombres complexes permet de simplifier certains calculs.

Exemple 6.3. *On veut calculer* $I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin(t)}$. *On peut d'abord noter que la fonction* $t \mapsto \frac{1}{2+\sin(t)}$ *est continue sur* $[0, 2\pi]$ *(et même sur* $\mathbb{R}$*) donc* I *est bien définie. Si on écrit* $\sin(t) = \frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i}$ *on a alors*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{2i}{4i + \mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{2i\mathrm{e}^{it}}{\mathrm{e}^{i2t} + 4i\mathrm{e}^{it} - 1}\,\mathrm{d}t.$$

La forme de l'intégrale invite à considérer comme lacet le cercle $C(0,1)$ *parcouru dans le sens trigonométrique. Celui-ci est paramétré par* $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto \mathrm{e}^{it}$ *et on a donc*

$$I = \int_{C(0,1)} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}\,\mathrm{d}z.$$

Soit f la fonction définie par $f(z) = \dfrac{2}{z^2+4iz-1}$. La fonction f est méromorphe (c'est un quotient de deux polynômes). Son dénominateur se factorise facilement :

$$z^2+4iz-1 \;=\; (z+2i)^2+3 \;=\; (z+2i+i\sqrt{3})(z+2i-i\sqrt{3}).$$

La fonction f a donc deux pôles simples : $z_- = -i(2+\sqrt{3})$ et $z_+ = -i(2-\sqrt{3})$. On vérifie que z_- est à l'extérieur du cercle $C(0,1)$ tandis que z_+ est à l'intérieur (faites-le !). Ainsi $\mathrm{Ind}\,(C(0,1),z_-) = 0$ et $\mathrm{Ind}\,(C(0,1),z_+) = 1$. Il reste à calculer le résidu de f en z_+ (inutile de calculer celui en z_- puisque $\mathrm{Ind}\,(C(0,1),z_-) = 0$). En utilisant au choix le 1. ou le 3. de la proposition précédente on trouve

$$\mathrm{Res}(f,z_+) \;=\; \lim_{z\to z_+}(z-z_+)f(z) \;=\; \lim_{z\to z_+}\frac{2}{z-z_-} \;=\; \frac{2}{z_+-z_-} \;=\; \frac{1}{i\sqrt{3}}.$$

Finalement on trouve $I = 2i\pi \times \dfrac{1}{i\sqrt{3}} \times 1 = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Bien entendu le résultat est un nombre réel, et il est positif puisque la fonction de départ était positive.

Remarque 6.4. *Avec le même type de raisonnement on peut calculer des intégrales du type $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos(t),\sin(t))}{Q(\cos(t),\sin(t))}\,\mathrm{d}t$ où P,Q sont des polynômes de deux variables. Vous avez vu en L1 qu'on pouvait calculer ce type d'intégrale avec un changements de variables du type $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, $u = \cos(t)$, $u = \sin(t)$ ou $u = \tan(t)$ (règles de Bioche). Essayez d'appliquer cette méthode ici et comparez avec le calcul effectué ci-dessus.*

Exemple 6.4. *On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$ où $n \geq 2$ est un entier pair. Le fait que n soit pair garantit que la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^n}$ est bien continue sur $\mathbb{R}$ (que se passe-t-il si n est impair ?). La condition $n \geq 2$ garantit elle que l'intégrale converge (prouvez-le !). On va chercher à calculer cette intégrale. Là encore vous avez vu une méthode en L1 qui permet de calculer ce type d'intégrales. La fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^n}$ est une fraction rationnelle. Il suffit donc de factoriser $1+x^n$ en produit de facteurs irréductibles et de décomposer f en éléments simples. Pour n assez petit, disons 2 ou 4, ça se fait assez bien mais si $n = 14$ par exemple ce n'est plus aussi simple. C'est surtout très fastidieux. On va ici encore essayer d'appliquer le théorème des résidus. Il va falloir cependant procéder en deux temps car l'intégrale va de $-\infty$ à $+\infty$ et un lacet ne peut pas "aller vers l'infini".*

Puisque l'intégrale converge on a $I = \lim_{R\to+\infty} I_R$ avec $I_R = \displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$. On va considérer l'intégrale de la fonction méromorphe $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$ le long du lacet γ_R constitué du segment allant de $z = -R$ à $z = R$ et du demi-cercle de centre 0 et de rayon R parcouru dans le sens trigonométrique. On pourra alors écrire

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{[-R,R]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C^+(0,R)} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

où $C^+(0,R)$ désigne le demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon R. Celui-ci peut être paramétré par $\gamma(t) = R\mathrm{e}^{it}$ avec $t \in [0,\pi]$. On aura donc

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} + \int_0^{\pi} \frac{1}{1+R^n\mathrm{e}^{int}}\, iR\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t.$$

On va calculer l'intégrale dans le membre de gauche à l'aide du théorème des résidus et on passera ensuite à la limite $R \to \infty$.

La fonction f *a exactement* n *pôles simples. En effet c'est une fraction rationnelle dont le dénominateur est de degré* n *et dont les racines sont les* n *racines* n*-ème de* -1 *: ce sont les nombres* $z_k = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}+i\frac{2k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{i\frac{2k+1}{n}\pi}$, $k \in \{0,\dots,n-1\}$. *Tous les pôles sont de module* 1 *donc si* $R > 1$ *aucun pôle n'est sur* γ_R. *Le théorème des résidus assure alors que*

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Res}(f, z_k)\mathrm{Ind}(\gamma_R, z_k).$$

Comme tous les pôles de f *sont simples, pour calculer le résidu de* f *en* z_k *on peut appliquer le 3. de la Proposition 6.4 avec* $g(z) = 1$ *et* $h(z) = 1 + z^n$. *On a donc*

$$\mathrm{Res}(f, z_k) = \frac{g(z_k)}{h'(z_k)} = \frac{1}{nz_k^{n-1}} = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-i\frac{n-1}{n}(2k+1)\pi} = -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{i\frac{2k+1}{n}\pi}.$$

Pour calculer l'indice de chacun des z_k *il faut voir quels sont ceux qui sont à l'intérieur de* γ_R. *Puisque* $R > 1$ *et* $|z_k| = 1$ *il suffit de voir quels sont ceux qui ont une partie imaginaire positive. Or* $\mathrm{Im}(z_k) = \sin\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right)$ *avec* $\frac{\pi}{n} \leq \frac{2k+1}{n}\pi \leq \frac{(2n-1)\pi}{n} < 2\pi$. *Ceux qui ont une partie imaginaire positive sont ceux pour lesquels* $\frac{2k+1}{n}\pi \leq \pi$, *i.e.* $k = 0, \dots, \frac{n}{2} - 1$ *(on rappelle que* n *est pair). Ainsi on a*

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z &= -\frac{2i\pi}{n}\sum_{k=0}^{n/2-1} \mathrm{e}^{i\frac{2k+1}{n}\pi} \\
&= -\frac{2i\pi}{n} \times \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}} \times \frac{1-\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{n/2}}{1-\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}} \\
&= -\frac{2i\pi}{n} \times \frac{2}{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{n}} - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}} \\
&= \frac{2\pi}{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)},
\end{aligned}$$

et donc pour tout $R > 1$ *on a*

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} &= \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_0^{\pi} \frac{1}{1+R^n\mathrm{e}^{int}} iR\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\pi}{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} - \int_0^{\pi} \frac{1}{1+R^n\mathrm{e}^{int}} iR\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Il reste à passer à la limite $R \to +\infty$. *Pour tout* $R > 1$ *et tout* $t \in [0, \pi]$ *on a*

$$\left|\frac{1}{1+R^n\mathrm{e}^{int}} iR\mathrm{e}^{it}\right| = \frac{R}{|1+R^n\mathrm{e}^{int}|} \leq \frac{R}{|R^n\mathrm{e}^{int}|-1} = \frac{R}{R^n-1}.$$

Donc

$$0 \leq \left|\int_0^{\pi} \frac{1}{1+R^n\mathrm{e}^{int}} iR\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\pi R}{R^n-1} \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Finalement on obtient

$$I = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} = \frac{2\pi}{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

A nouveau bien entendu le résultat est un nombre réel, et il est positif puisque la fonction de départ était positive.

6.3 Séries de Laurent et singularités essentielles

On termine le chapitre, et ce cours, avec la notion de série de Laurent qui permet entre autres de traiter de façon "unifiée" les différents types de singularités : artificielles, pôles mais aussi essentielles. Le point de départ des séries de Laurent est l'étude des fonctions holomorphes dans une couronne.

Définition 6.5. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $0 \leq r < R \leq +\infty$. On appelle couronne, ou anneau, de centre z_0 et de rayons r et R l'ensemble*

$$A(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, r < |z| < R\}.$$

Remarque 6.5. *1) Si R est fini l'ensemble $A(z_0, r, R)$ est la partie du plan comprise strictement entre les cercles de centre z_0 et de rayons r et R.*

2) Un cas important qu'on a déjà rencontré est celui où $r = 0$. On a alors simplement $A(z_0, 0, R) = D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

Définition 6.6. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $0 \leq r < R \leq +\infty$. On appelle série de Laurent sur $A(z_0, r, R)$ toute série de la forme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ où*

1. *la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à R,*
2. *la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_{-n}(z-z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $\dfrac{1}{r}$ avec par convention $\dfrac{1}{r} = +\infty$ si $r = 0$.*

Proposition 6.5. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ une série de Laurent sur $A(z_0, r, R)$. Pour tous $r < r_1 \leq r_2 < R$ la série converge normalement sur $A(z_0, r_1, r_2)$ dans le sens où les deux séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ et $\displaystyle\sum_{n\leq 0} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n\geq 0} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ convergent normalement sur cet ensemble. En particulier toute série de Laurent définit une fonction f holomorphe sur $A(z_0, r, R)$.*

Démonstration. Par définition la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à R. Elle converge donc normalement sur $D(z_0, r_2)$ et donc aussi sur $A(z_0, r_1, r_2) \subset D(z_0, r_2)$.

De même la série entière $\sum_{n\geq 0} a_{-n}(z-z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $\dfrac{1}{r}$. Puisque $r_1 > r$ on a $\dfrac{1}{r_1} < \dfrac{1}{r}$ et donc la série $\sum_{n\geq 0} |a_{-n}|\frac{1}{r_1^n}$ converge. Or, si $z \in A(z_0, r_1, r_2)$ on a $|z-z_0| > r_1$ et donc, pour tout $n \geq 0$, $\left|a_{-n}(z-z_0)^{-n}\right| = \dfrac{|a_{-n}|}{|z-z_0|^n} < \dfrac{|a_{-n}|}{r_1^n}$. La série $\sum_{n\geq 0} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ converge donc normalement sur $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-z_0| > r_1\}$ et donc sur $A(z_0, r_1, r_2)$.

Finalement une série entière définit une fonction holomorphe. Ainsi les fonctions $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$ sont holomorphes sur $D(0, R)$ et $D\left(0, \dfrac{1}{r}\right)$ respectivement. La fonction $f(z) = g(z-z_0) + h\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ est donc holomorphe sur

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-z_0| < R\} \cap \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left|\frac{1}{z-z_0}\right| < \frac{1}{r}\right\} = A(z_0, r, R).$$

□

Le théorème qui suit est l'analogue du Théorème 4.3 pour les fonctions holomorphes sur un anneau. Sa preuve est d'ailleurs (presque) identique.

Théorème 6.3. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$ et f une fonction holomorphe sur $A(z_0, r, R)$. Alors*

1. *pour tout $n \in \mathbb{Z}$ le nombre $a_n = \dfrac{1}{2\pi\rho^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho e^{it}\right) e^{-int}\, dt$ ne dépend pas de $\rho \in]r, R[$,*
2. *la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à R et la série entière $\sum_{n\geq 0} a_{-n}n(z-z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $\frac{1}{r}$,*
3. *pour tout $z \in A(z_0, r, R)$ on a $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Un tel développement est unique.*

Remarque 6.6. *La formule $a_n = \dfrac{1}{2\pi\rho^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho\, e^{it}\right) e^{-int}\, dt$ peut également s'écrire*

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,\rho)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz, \qquad \forall \rho \in]r, R[.$$

Démonstration. On reprend le raisonnement de la preuve du Théorème 4.3. Pour tout $\rho \in]r, R[$ on considère la fonction $g_\rho(t) = f\left(z_0 + re^{it}\right)$. Comme f est holomorphe elle est analytique et donc en particulier C^1. Ainsi la fonction g est 2π-périodique et de classe C^1. Les coefficients de Fourier de g_ρ sont donnés, pour $n \in \mathbb{Z}$, par

$$c_n(\rho) := c_n(g_\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho\, e^{it}\right) e^{-int}\, dt.$$

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On veut montrer que $\rho^{-n}c_n(\rho)$ ne dépend pas de ρ sur $]r,R[$, i.e. $c_n(\rho)$ est de la forme $c_n(\rho) = a_n\rho^n$. Comme la fonction f est de classe C^1 la fonction de deux variables $\varphi(\rho,t) := f\left(z_0 + \rho\,\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{-int}$ est aussi de classe C^1 (sur $]r,R[\times[0,2\pi]$). Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres garantit que la fonction $c_n(\rho)$ est de classe C^1 et vérifie

$$c_n'(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}(\rho,t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{it}f'\left(z_0+\rho\,\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs la fonction g_ρ est C^1 et on a $g_\rho'(t) = i\rho\,\mathrm{e}^{it}f'\left(z_0+\rho\,\mathrm{e}^{it}\right)$. On constate donc que pour tout $\rho\in]r,R[$ le coefficient de Fourier de g_ρ' vaut $c_n(g_\rho') = i\rho c_n'(\rho)$. Or, comme g_ρ est C^1, d'après la Proposition 1.7 on a $c_n(g_\rho') = inc_n(g_\rho)$. Ainsi, pour tout $\rho\in]r,R[$ on a $c_n'(\rho) = \frac{n}{\rho}c_n(\rho)$. L'équation $y'(\rho) = \frac{n}{\rho}y(\rho)$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les solutions sont de la forme $y(\rho) = C\mathrm{e}^{n\ln(\rho)} = C\rho^n$ où $C\in\mathbb{C}$ est une constante. Ainsi il existe $a_n\in\mathbb{C}$ tel que $c_n(\rho) = a_n\rho^n$ pour tout $\rho\in]r,R[$.

2. et 3. Comme la fonction g_ρ est de classe C^1 on peut appliquer le théorème de Dirichlet. Pour tout $\rho\in]r,R[$ on a pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$g_\rho(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\rho^n\mathrm{e}^{int},$$

et de plus, d'après le Corollaire 1.2, la convergence est normale, i.e. la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|\rho^n$ converge et donc il en de même des deux séries $\sum\limits_{n\geq 0}|a_n|\rho^n$ et $\sum_{n\geq 0}|a_{-n}|\rho^{-n}$. Comme ceci est vrai pour tout $r<\rho<R$, la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0}|a_n|\rho^n$ assure que la série entière $\sum a_n(z-z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à R et celle de la série $\sum_{n\geq 0}|a_{-n}|\rho^{-n}$ assure que la série entière a un rayon de convergence au moins égal à $\frac{1}{r}$. Enfin, si $z\in A(z_0,r,R)$ on a, en écrivant $z = z_0+\rho\,\mathrm{e}^{it}$,

$$f(z) \;=\; f\left(z_0+\rho\,\mathrm{e}^{it}\right) \;=\; g_\rho(t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\rho^n\mathrm{e}^{int} \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n.$$

On montre enfin l'unicité du développement en série de Laurent. On suppose que $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$. Soit $\rho\in]r,R[$ et r_1,r_2 tels que $r<r_1<\rho<r_2<R$. Comme il y a convergence normale sur $A(z_0,r_1,r_2)$ la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}b_n\rho^n\mathrm{e}^{int}$ converge normalement sur $[0,2\pi]$ vers $f(z_0+\rho\mathrm{e}^{it})$ et on a donc, d'après le Théorème 1.1,

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+\rho\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t = a_n.$$

□

Si maintenant $z_0\in\Omega$ est une singularité isolée d'une fonction holomorphe f, comme Ω est ouvert il existe $R>0$ tel que $D(z_0,R)\subset\Omega$ et tel que f est holomorphe sur $D(z_0,R)\setminus$

$\{z_0\} = A(z_0, 0, R)$. Le théorème précédent assure ainsi qu'il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on ait

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{6.3}$$

Cette décomposition ressemble à celle obtenue en (6.1) dans le cas où z_0 est un pôle. On va en fait voir que c'est la décompositionn (6.1) qui est un particulier de (6.3) et que la décomposition en série de Laurent permet également de classifier les singularités.

Proposition 6.6. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ et f une fonction holomorphe sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ dont le développement en série de Laurent est donné par (6.3).*

1. *Si $a_{-n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ alors z_0 est une singularité artificielle de f.*
2. *Si $a_{-n} \neq 0$ pour un nombre fini non nul d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$ alors z_0 est un pôle de f. De plus l'ordre du pôle est $n_0 = \max\{n \in \mathbb{N}^* \,|\, a_{-n} \neq 0\}$.*
3. *Si $a_{-n} \neq 0$ pour une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$ alors z_0 est une singularité essentielle de f.*

Démonstration. Le 1. et le 2. découlent directement de la définition de singularité artificielle et de celle de pôle.

En effet, si $a_{-n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ alors d'après (6.3) pour tout $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

et f se prolonge en une fonction holomorphe en z_0 en posant $f(z_0) = a_0$.

Si maintenant $a_{-n} \neq 0$ pour un nombre fini non nul d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et $n_0 = \max\{n \in \mathbb{N}^* \,|\, a_{-n} \neq 0\}$ alors, toujours d'après (6.3), pour tout $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on a

$$f(z) = \sum_{n=-n_0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \frac{1}{(z - z_0)^{n_0}} \sum_{n=-n_0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n+n_0} = \frac{1}{(z - z_0)^{n_0}} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+n_0} (z-z_0)^k.$$

La fonction $g(z) = (z - z_0)^{n_0} f(z)$ se prolonge donc en fonction holomorphe en z_0 en posant $g(z_0) = a_{n_0} \neq 0$. z_0 est donc bien un pôle et comme $a_{n_0} \neq 0$ l'ordre du pôle est bien n_0.

Finalement pour le 3. il suffit d'utiliser l'unicité du développement en séries de Laurent. En effet, si z_0 n'était pas une singularité essentielle ce serait une singularité artificielle ou un pôle. On pourrait donc écrire, dans $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$, la fonction f sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=-n_0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

où $n_0 = 0$ si z_0 est une singularité artificielle et n_0 est l'ordre du pôle z_0 sinon. Par unicité du développement en série de Laurent on aurait alors $a_n = 0$ pour tout $n \leq n_0$ $(n \in \mathbb{Z})$. $\square$

On peut enfin démontrer que le théorème des résidus se généralise au cas de fonctions ayant des singularités essentielles. Pour cela, et par analogie avec ce qu'on a fait pour les fonctions méromorphes, on définit la notion de résidu.

Définition 6.7. *Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$*,* $R > 0$ *tel que* f *soit holomorphe sur* $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ *et* $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ *son développement en séries de Laurent. Le nombre* a_{-1} *s'appelle le résidu de* f *en* z_0 *et est noté* $\mathrm{Res}(f, z_0)$*, i.e.* $\mathrm{Res}(f, z_0) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(z_0,r)} f(z)\,\mathrm{d}z$ *où* $0 < r < R$*.*

On a alors

Théorème 6.4 (Théorème des résidus - 2)**.** *Soit* Ω *un ouvert étoilé,* $\mathcal{P}$ *une partie discrète de* Ω *et* $f : \Omega \setminus \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe. Pour tout lacet* γ *inclus dans* Ω *et ne passant pas par* $\mathcal{P}$ *on a*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{z\in\mathcal{P}} \mathrm{Res}(f, z)\mathrm{Ind}(\gamma, z).$$

La somme dans le membre de droite converge dans le sens où il n'y a qu'un nombre fini de termes non-nuls.

Remarque 6.7. *La preuve est essentiellement la même que pour les fonctions méromorphes. La seule difficulté est de justifier l'intégration terme à terme de la partie d'indices négatifs dans la série de Laurent alors qu'on avait juste une somme finie dans le cas des fonctions méromorphes. Cela se justifie en utilisant la convergence uniforme de la série des termes d'indices négatifs.*