Troisième Année de Licence M
Analyse Numérique
2014-2015

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

TD 1 : Formule de Taylor et valeurs approchées du zéro d'une fonction

Exercice 1 : Soit f une fonction de classe C^5 sur l'intervalle $[a, b]$, $a < b$ de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe quatre points $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$ tels que

$$f(x_1) = 0, \quad f(x_2) = f'(x_2) = 0, \quad f(x_3) = f'(x_3) = f''(x_3) = 0$$

Montrer qu'il existe un point ξ dans $]a, b[$ tel que $f^{(5)}(\xi) = 0$.

Exercice 2 : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0, 1]$. Déterminer une constante C telle que pour x et $x \pm 2h \in]0, 1[$ on a

$$|f(x + 2h) + 2f(x - h) - f(x - 2h) - 2f(x + h)| \leq Ch^3$$

Exercice 3 : Soit une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a; b]$.

1. Déterminer la fonction L affine égale à f en a et b.
2. Soit $h \in]a, b[$ fixé. On définit R, Π et F sur $[a, b]$ par

$$R(t) = f(t) - L(t)\ , \Pi(t) = (t - a)(t - b) \text{ et } F(t) = R(t)\Pi(h) - R(h)\Pi(t)$$

   (a) Déterminer les racines communes à R et Π.
   (b) Montrer qu'il existe $\xi \in]a; b[$ tel que $F''(\xi) = 0$.
   (c) Déterminer $F''(t)$ puis montrer que $R(h) = \frac{1}{2!}f''(\xi)\Pi(h)$.
   (d) En déduire que : $\forall x \in [a, b],\ \exists \xi \in]a, b[,\ f(x) - L(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x - a)(x - b)$.

Exercice 4 : Soit $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(x^3) - x$

1. Vérifier que f est concave, strictement croissante sur $[1, 2]$ et qu'elle s'y annule exactement une fois. On note $\xi \in]1, 2[$ tel que $f(\xi) = 0$. représenter f.
2. On définit la suite (x_n) par $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$
   (a) Donner une interprétation graphique de la suite (x_n).
   (b) Justifier rapidement le fait que la suite est bien définie.
   (c) Calculer x_1.
   (d) On pose $\varepsilon_n = |x_n - \xi|$, montrer que

$$\forall n \geq 1\,, \quad \varepsilon_{n+1} \leq \frac{4}{3}\,\varepsilon_n^2$$

   En déduire que

$$\forall n \geq 0\,, \quad \epsilon_{n+1} \leq \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{2^n}$$

   (e) Déterminer n aussi petit que possible pour que $\varepsilon_n < 10^{-8}$.
3. Écrire la suite (y_n) définie par la méthode de la sécante qui permet d'approcher ξ, on partira de l'intervalle [1,2].
   (a) Justifier graphiquement que (y_n) est décroissante.
   (b) Montrer que $y_{n+1} - \xi = \frac{y_n - f(y_n)\xi - \xi + f(y_n)}{1 + f(y_n)}$

(c) En déduire qu'il existe $\delta_n \in [\frac{3}{2}; 2]$ tel que $y_{n+1} - \xi = \frac{\left(1+f'(\delta_n)\xi\right)(y_n-\xi)}{1+f(y_n)}$

(d) En déduire que $|y_{n+1} - \xi| \leq \frac{3}{4}|y_n - \xi|$.

(e) montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \ , \quad |y_n - \xi| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

(f) Déterminer n aussi petit que possible pour que $|y_n - \xi| < 10^{-8}$.

Exercice 5 : Méthode de Richardson

1. Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe 3 réels λ, h_1 et h_2 tels que $u_n = l + \lambda h_1^n + O(h_2^n)$, avec $|h_2| < |h_1| < 1$, on ne connaît ni l ni λ. On pose

$$v_n = \frac{u_{n+1} - h_1 u_n}{1 - h_1}$$

Montrer que la suite (v_n) converge plus vite vers l que (u_n) et que l'on a : $v_n = l + O(h_2^n)$.

2. Soit la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = 2^n \sin(\frac{\pi}{2^n})$.

(a) Montrer que pour $n \geq 2$, u_n est le demi périmètre d'un polygone régulier convexe à 2^n cotés, inscrit dans un cercle de rayon 1.

(b) Montrer que l'on peut calculer u_n sans utiliser π.

(c) Montrer que $u_n = \pi - \frac{\pi^3}{6 \cdot 4^n} + O(\frac{1}{16^n})$.

(d) Appliquer la méthode précédente pour accélérer la convergence.

Exercice 6 : Méthode d'Aitken

Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe 3 réels λ, h_1 et h_2 tels que $u_n = l + \lambda h_1^n + O(h_2^n)$, avec $|h_2| < |h_1| < 1$, on ne connaît ni l, ni λ ni h_1.

1. On pose $t_n = \frac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}}$. Monter que $t_n = h_1 + O((\frac{h_2}{h_1})^n)$.

2. On pose

$$w_n = \frac{u_{n+1} - t_n \cdot u_n}{1 - t_n} = u_n + \frac{1}{\frac{1}{u_{n+1}-u_n} - \frac{1}{u_n-u_{n-1}}} \left(= \frac{u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}}{2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}}\right)$$

Montrer que (w_n) converge plus vite que (u_n) et $w_n = l + O(h_2^n)$.

Exercice 7 : Méthode du point milieu

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a; b]$.

1. Déterminer la fonction g affine telle que $g\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $g'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

2. Montrer que si f est affine alors $g = f$.

3. Soit $h \in]a, b[\setminus \{\frac{1}{2}(a + b)\}$ fixé. On définit R, Π et F sur $[a, b]$ par

$$R(t) = f(t) - g(t) \ , \Pi(t) = \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 \quad \text{et } F(t) = R(t)\Pi(h) - R(h)\Pi(t)$$

(a) Déterminer les racines communes à R et Π.

(b) Montrer qu'il existe $\xi \in]a; b[$ tel que $F''(\xi) = 0$.

(c) Déterminer $F''(t)$ puis montrer que $R(h) = \frac{1}{2!} f''(\xi)\Pi(h)$.

(d) En déduire que : $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi \in]a, b[$, $f(x) - g(x) = \frac{1}{2} f''(\xi) \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2$.

4. On pose $M_2 = \sup |f''|$, montrer que pour tout $t \in [a; b]$, $|f(t) - g(t)| \leq \frac{1}{2} M_2 \left(\frac{a+b}{2} - t\right)^2$.

5. En déduire que

$$\left| \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t - (b - a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24} M_2$$

6. Soit f définie maintenant sur $[A, B]$, on découpe cet intervalle en n intervalles de même longueur, et sur chacun d'eux on applique l'inégalité précédente, déterminer une majoration de :

$$\left| \int_A^B f(t) \, \mathrm{d}t - \frac{B-A}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(A + \frac{B-A}{2n} + k\frac{B-A}{n}\right) \right|$$

Troisième Année de Licence M
Analyse Numérique
2014/2015

TD 2 : Fin de l'intégration et interpolation polynomiale

Exercice 1 : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, on pose $S_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $M^k = \displaystyle\sup_{x\in[0,1]} |f^{(k)}(x)|$.

1. A quoi correspond la formule $S_n(f)$ pour la fonction f ?
2. Soit $S \in \mathbb{N}*$, montrer que pour tout $k < n$ et $t \in [\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}]$ il existe un $\xi_{k,n}$ tel que :
$$f(t) = \sum_{s=0}^{S-1} \frac{1}{s!} f^{(s)}\left(\frac{k}{n}\right)\left(t - \frac{k}{n}\right)^s + \frac{1}{S!} f^{(S)}\left(\xi_{k,n}\right)\left(t - \frac{k}{n}\right)^S$$
3. En déduire que :
$$\left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{s=0}^{S-1} \frac{1}{(s+1)!\,n^{s+1}} f^{(s)}\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M_S}{(S+1)!\,n^{S+1}}$$
4. En déduire que :
$$\left| \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{s=0}^{S-1} \frac{1}{(s+1)!\,n^{s}} S_n\left(f^{(s)}\right) \right| \leq \frac{M_S}{(S+1)!\,n^{S}}$$
5. En déduire qu'il existe des constantes K_i telles que :
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - S_N(f) = \frac{K_1}{N} + \frac{K_2}{N^2} + \frac{K_3}{N^3} + ... + \frac{K_{S-1}}{N^{S-1}} + O(\frac{1}{N^S})$$
6. On pose $U_1(N) = 2S_{2N} - S_N$, montrer que $U_1(N) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = O(\frac{1}{N^2})$.
7. On pose $U_2(N) = \dfrac{4U_1(2N) - U_1(N)}{3}$, montrer que $U_2(N) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = O(\frac{1}{N^3})$
8. On pose $U_{k+1}(N) = \dfrac{2^{k+1}U_k(2N) - U_k(N)}{2^{k+1} - 1}$, montrer que $U_k(N) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = O(\frac{1}{N^{k+1}})$

Exercice 2 :

1. Déterminer P_0, P_1, P_2, P_3 P_4 des polynômes de degré inférieur ou égal à 4 tels que
$$\begin{aligned}
P_0(0) = 1,\ P_0'(0) = P_0''(0) = P_0(1) = P_0(-1) = 0\\
P_1'(0) = 1,\ P_1(0) = P_1''(0) = P_1(1) = P_1(-1) = 0\\
P_2''(0) = 1,\ P_2(0) = P_2'(0) = P_2(1) = P_2(-1) = 0\\
P_3(1) = 1,\ P_3(0) = P_3'(0) = P_3''(0) = P_3(-1) = 0\\
P_4(-1) = 1,\ P_4(0) = P_4'(0) = P_4''(0) = P_4(1) = 0
\end{aligned}$$
et montrer que les P_i forment une base de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 4.
2. Soit f une application de classe C^5 sur $[-1,1]$
   (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme P_f de degré inférieur ou égal à 4 tel que
   $$P_f(0) = f(0),\ P_f'(0) = f'(0),\ P_f''(0) = f''(0),\ P_f(1) = f(1),\ P_f(-1) = f(-1)$$
   (b) Soit $h \in]-1,1[\setminus\{0\}$ fixé. On définit R, Π et F sur $[-1,1]$ par
   $$R(t) = f(t) - P_f(t)\ ,\ \Pi(t) = t^3(t-1)(t+1) \text{ et } F(t) = R(t)\Pi(h) - R(h)\Pi(t)$$
      i. Déterminer les racines communes à R et Π.
      ii. Montrer qu'il existe $\xi \in]-1;1[$ tel que $F^{(5)}(\xi) = 0$.
      iii. Déterminer $F^{(5)}(t)$ puis montrer que $R(h) = \dfrac{1}{5!} f^{(5)}(\xi)\Pi(h)$.
   (c) En déduire une majoration de $\|f - P_f\|_\infty$, en fonction de $M_5 = \max_{t\in[-1;1]} |f^{(5)}(t)|$.
   (d) Déterminer une majoration de $\|f - P_f\|_1$.

Exercice 3 : 1. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,1]$

(a) Montrer qu'il existe un unique polynôme P_f de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$$P_f(0) = f(0),\ P_f'(0) = f'(0),\ P_f(1) = f(1),\ P_f'(1) = f'(1)$$

(b) Soit $h \in]0,1[$ fixé. On définit R, Π et F sur $[0,1]$ par

$$R(t) = f(t) - P_f(t)\ ,\ \Pi(t) = t^2(t-1)^2 \text{ et } F(t) = R(t)\Pi(h) - R(h)\Pi(t)$$

i. Déterminer les racines communes à R et Π, ainsi que leur multiplicité.

ii. Montrer qu'il existe $\xi \in]0;1[$ tel que $F^{(4)}(\xi) = 0$.

iii. En déduire que $R(h) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)\Pi(h)$.

iv. Montrer que $\forall t \in [0;1]$, $|\Pi(t)| \leq \frac{1}{16}$

(c) En déduire la majoration $\|f - P_f\|_\infty \leq \frac{1}{384} M_4$, où $M_4 = \max_{t\in[0;1]} |f^{(4)}(t)|$.

(d) On utilise la même méthode pour trouver une majoration de $\|f' - P_f'\|_\infty$, montrer qu'il existe $t_0 \in]0;1[$ tel que $R'(t_0) = 0$, on pose alors $\widetilde{R}(t) = R'(t) = f'(t) - P_f'(t)$, $\widetilde{\Pi}(t) = t(t-1)(t-t_0)$ et pour $h \neq t_0$, $\widetilde{F}(t) = \widetilde{R}(t)\widetilde{\Pi}(h) - \widetilde{R}(h)\widetilde{\Pi}(t)$, montrer que $\|f' - P_f'\|_\infty \leq \frac{1}{24} M_4$. (on peut trouver une meilleure constante)

Exercice 4 : On cherche à interpoler la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ aux points $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2$ et 4 par son polynôme de Lagrange $P_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2},2,4]}$.

Ci contre la fonction f et le polynôme de Lagrange $P_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2},2,4]}$.

1. Calculer les différences divisées : $f_{[\frac{1}{4}]}$, $f_{[\frac{1}{2}]}$, $f_{[2]}$, $f_{[4]}$, $f_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}$, $f_{[\frac{1}{2},2]}$, $f_{[2,4]}$, $f_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2},2]}$, $f_{[\frac{1}{2},2,4]}$, $f_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2},2,4]}$
2. En déduire $P_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2},2,4]}$.
3. Retrouver ce résultat en utilisant la base de polynômes de Lagrange associé à $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4\}$.
4. Retrouver ces résultats en vous ramenant à l'inversion d'une matrice de Vandermonde, ce qui correspond à chercher $P_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2},2,4]}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
5. Traiter cet exercice en prenant pour fonction f la fonction définie par $f(x) = x^2$.

Exercice 5 : Donnez le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points indiqués :

— $f(x) = \exp(x)$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$,
— $f(x) = \sin(\pi x)$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$,
— $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Troisième Année de Licence M
Analyse Numérique
2014/2015

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

TD 3 : Polynômes de meilleure approximation

Exercice 1 : Soit la suite de polynômes (P_N)

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{N^2}{n^2+N^2} \frac{N!x^n(1-x)^{N-n}}{n!(N-n)!}$$

1. Montrer que (P_N) est la suite des polynômes de Bernstein d'une fonction f que l'on précisera.
2. En déduire que (P_N) converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

Exercice 2 : Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$.

1. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \int_0^1 P(t)f(t)\,dt = 0$.
2. En déduire que f est la fonction nulle.

Exercice 3 : On note $E = \{f : [0,\infty[\to \mathbb{R}\ \text{continues};\ \displaystyle\int_0^\infty |\mathrm{f(x)}|^2 \mathrm{e^{-x}}\,\mathrm{dx} < \infty\}$, on munit E du produit scalaire

$$(f,g) = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

On note $(\mathcal{L}_n)_n$ la suite de polynôme unitaires orthogonalisées à l'aide de la méthode de Gram-Schmidt, en partant de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Calculer $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$. Déterminer les polynômes $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$.
2. Montrer que $(X^m, \mathcal{L}_n) = 0$ pour $m < n$.
3. Soit P un polynôme de degré d et soit p un entier positif ou nul.
   (a) Montrer que la fonction $Q(x) = e^x \frac{d^p}{dx^p}(P(x)e^{-x})$ est une fonction polynôme et calculer son degré.
   (b) Déterminer le coefficient dominant de Q en fonction de p et du coefficient dominant de P.
4. On définit les polynômes de Laguerre par $L_n(x) = (-1)^n e^x \dfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$
   Pour $k \leq n$, montrer que $(L_n, x^k) = (-1)^{k+n} \displaystyle\int_0^{+\infty} k!\, \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^n e^{-x})\,dx$
   En déduire que $\forall k < n,\ (L_n, x^k) = 0$.
5. Montrer que pour tout n, $L_n = \mathcal{L}_n$.
6. Calculer (L_n, x^n), en déduire que $\|L_n\| = n!$
7. Calculer L_3 puis déterminer le polynôme de meilleure approximation d'ordre 3 pour la norme de E de la fonction cosinus.

Exercice 4 : Soient $h(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$, et $H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}x^2}(\frac{d^n}{dx^n})(e^{-\frac{1}{2}x^2})$, H_n est un polynôme de degré n appelé polynôme de Hermite. On munit l'espace vectoriel E des fonctions continues f dont l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)e^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, du produit scalaire :

$$< f; g >= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Calculer H_0, H_1, H_2.
2. Montrer que $hH_n = (-1)^n h^{(n)}$.
3. A l'aide d'intégrations par parties successives, montrer que : $\forall n, m \in \mathbb{N},\ n < m \Rightarrow < X^n, H_m >= 0$.
4. De même calculer $\forall n \in \mathbb{N},\ < X^n, H_n >$
5. Déterminer le coefficient dominant de H_n.

6. Montrer que $(H_0, H_1, \sqrt{\frac{1}{2}}H_2 \dots, \sqrt{\frac{1}{n!}}H_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.
7. Montrer que $\forall i, j \in \mathbb{N},\ j < i-2 \Rightarrow < XH_{i-1}, H_j >= 0$.
8. En étudiant $XH_{n-1}(X)$, montrer qu'il existe $a_n,\ b_n$ et d_n tels que
$$a_n H_n(x) = (x + b_n)H_{n-1}(x) + d_n H_{n-2}(x)$$
9. A l'aide des coefficients dominants, montrer que pour tout n, $a_n = 1$.
10. Montrer que $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$, en déduire que $b_n = 0$.
11. En étudiant $< X^{n-2}, H_n >$, montrer que $d_n = 1 - n$.
12. Calculer H_3 et H_4.
13. Soit $f(x) = e^x$. Trouver le polynôme de meilleure approximation d'ordre 2 de f dans $(E, < \cdots >)$.

Exercice 5 : Soit $f \in C([0,1])$. On pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que $\|\ \|_1$ est une norme sur $C([0,1])$.

   Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On pose : $S(x) = \operatorname{sgn}(f(x) - P(x)) = \begin{cases} +1 \text{ si } f(x) - P(x) \geq 0 \\ -1 \text{ si } f(x) - P(x) < 0 \end{cases}$.
2. Dans cette question $f(x) = x^2$, $P(x) = x - \frac{2}{9}$. Représenter f, P, S et $(f - P)S$.
3. On suppose qu'il existe $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\int_0^1 x^k \operatorname{sgn}(f(x) - P_0(x))\,\mathrm{d}x = 0$ si $0 \leq k \leq n$. Montrer que $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_0^1 |f(x) - P_0(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 |f(x) - Q(x)|\,\mathrm{d}x$.
4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ strictement croissante. Calculer $\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|f - \lambda\|_1$. Application à $f(x) = x^2$.
5. Calculer $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \|x^2 - ax - b\|_1$.

Exercice 6 : Différences divisées

Partie I : Soit g la fonction définie par la formule $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. On note $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de g aux points $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3$ et $P_3 \in \mathbb{R}_3[X]$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de g aux points $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5$.

(a) Déterminer P_2 puis P_3 en déterminant leurs coordonnées dans la base de Lagrange : $L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$

(b) Déterminer P_2 en déterminant ses coordonnées dans la base canonique : $1, X, X^2$. Vous pouvez aussi retrouver P_3 dans la base canonique.

(c) Déterminer P_2 puis P_3 en déterminant leurs coordonnées dans la base de Newton :
$$N_0 = 1,\ N_1 = X - a_0,\ N_2 = (X - a_0)(X - a_1),\ N_3 = (X - a_0)(X - a_1)(X - a_2)$$

Partie II : Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ le polynôme d'interpolation de Lagrange d'une fonction f aux points $x_0, x_1, \dots x_n$, et $N_0 = 1, N_1 = X - x_0, N_2 = (X - x_0)(X - x_1), \dots, N_n = (X - x_0)(X - x_1)\dots(X - x_{n-1})$, la base de Newton associé à $x_0, x_1, \dots x_n$.

(a) Soit $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ les coordonnées de P dans la base $(N_0, N_1, \dots N_n)$, montrer que c_K ne dépend que de $(x_0, x_1, \dots, x_K)$, et de $(f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_K))$ on le note $f_{[x_0, x_1, \dots x_K]}$.

(b) Montrer que le coefficient de X^n dans P est $f_{[x_0, x_1, \dots x_n]}$

(c) Soit T_1 le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_j, x_{j+1}, \dots x_{j+s}$, T_2 le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_{j+1}, x_{j+2}, \dots x_{j+s+1}$ et
$$H = \frac{(X - x_{j+s+1})T_1 - (X - x_j)T_2}{x_j - x_{j+s+1}}$$
Montrer que H est le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_j, x_{j+1}, \dots x_{j+s+1}$ en déduire que
$$f_{[x_j, x_{j+1}, \dots x_{j+s+1}]} = \frac{f_{[x_j, x_{j+1}, \dots x_{j+s}]} - f_{[x_{j+1}, x_{j+2}, \dots x_{j+s+1}]}}{x_j - x_{j+s+1}}$$

(d) Pour $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 6, a_5 = 7$, calculer $g_{[a_0]}$, $g_{[a_1]}$, ... ,$g_{[a_5]}$, $g_{[a_0,a_1]}$, $g_{[a_1,a_2]}$, ... ,$g_{[a_4,a_5]}$, $g_{[a_0,a_1,a_2]}$, $g_{[a_1,a_2,a_3]}$, ... ,$g_{[a_3,a_4,a_5]}$, $g_{[a_0,a_1,a_2,a_3]}$, $g_{[a_1,a_2,a_3,a_4]}$, $g_{[a_2,a_3,a_4,a_5]}$, $g_{[a_0,a_1,a_2,a_3,a_4]}$, $g_{[a_1,a_2,a_3,a_4,a_5]}$, $g_{[a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5]}$, en déduire le polynôme d'interpolation de Lagrange de g aux points $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 6, a_5 = 7$.

Troisième Année de Licence M
Analyse Numérique
2014/2015

TD 4 : Équations différentielles

Exercice 1 : 1. Représenter dans le plan, le champ de vecteurs défini par $V(x,y) = (-y,x)$.

2. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$

3. Représenter la solution vérifiant $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$.

Exercice 2 : 1. Représenter dans le plan, le champ de vecteurs défini par $W(x,y) = (1, y-x)$. En particulier sur les droites d'équation $y = x$, $y = x+1$ et $y = x+2$.

2. Résoudre l'équation différentielle $y'(x) = y(x) - x$
3. Représenter la solution vérifiant $y(0) = 0$.
4. Représenter la solution vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 3 : Soit (E) l'équation différentielle $y'(t) = ty^2(t)$. C_0 la condition initiale $y(0) = 0$ et C_1 la condition initiale $y(0) = 1$.

1. Montrer que (E, C_0) possède une unique solution maximale. La déterminer.
2. Montrer, sans la déterminer, que (E, C_1) possède une unique solution maximale. Montrer que cette solution ne s'annule pas, on la note y_m.
3. Déterminer y_m, en précisant bien son domaine de définition.

Exercice 4 : Soit (E) l'équation différentielle $ty'(t) - 2y(t) = 1$. C_0 la condition initiale $y(0) = 1$ et C_1 la condition initiale $y(1) = 1$.

1. Peut-on appliquer le théorème de Cauchy Lipschitz ?
2. Montrer, sans la déterminer, que (E, C_0) ne possède pas de solution.
3. Résoudre (E, C_1), que vaut $y(-1)$? .

Exercice 5 : On rappelle que la fonction racine cubique est une fonction continue, strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On note (E) l'équation différentielle $y' = 3t\sqrt[3]{y}$.

1. Représenter la fonction racine cubique, que vaut sa dérivée ? est-elle lipschitzienne ? Mêmes questions pour la fonction $h(t) = \sqrt{t}^3$.
2. Déterminer une solution simple qui s'annule en 0.
3. Déterminer les solutions de (E) qui ne s'annulent pas, étudier attentivement pour chacune d'elles leur ensemble de définition.
4. Déterminer l'unique solution maximale y de (E) vérifiant $y(0) = -1$.
5. Chercher une solution de (E) vérifiant $y(-3) = 8$, qui ne s'annule pas, est-elle maximale ? Comment peut-on la prolonger en une solution maximale ?
6. Donner une idée de l'ensemble des solutions de (E).
7. Montrer que pour n'importe quel réel non nul a compris entre -27 et 27, il existe exactement une solution maximale de (E) tel que $y(-3) = 8$ et $y(3) = a$.

Exercice 6 : Montrer qu'il existe une unique solution à l'EDO suivante :

$$y'' + 2y'y + ty^4 = 1$$

vérifiant $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$.

Exercice 7 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, p et q des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, et (E) l'équation différentielle :

$$(E): \ y'' + py' + qy = 0$$

Soit f une solution non nulle de (E), on note Z_f l'ensemble des zéros de f, $Z_f = \{t \in I / f(t) = 0\}$.

1. Montrer que Z_f est un ensemble discret, c'est à dire que

$$\forall t_0 \in Z_f, \exists \varepsilon > 0,]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\cap Z_f = \{t_0\}$$

2. Montrer que les solution de (E) forment un espace vectoriel de dimension 2.
3. Montrer que $f'(a) \neq 0$.
4. Soit g une solution non nulle de (E) on note

$$w(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$$

   (a) Montrer que w vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre.
   (b) En déduire que w est soit nulle, soit ne s'annule pas.
5. Soient a, b deux éléments consécutifs de Z_f, montrer que f ne change pas de signe sur $]a, b[$, en déduire que $f'(a)f'(b) < 0$.
6. On suppose que w n'est pas la fonction nulle, montrer que $w(a)w(b) > 0$, en déduire que g s ?annule entre a et b.

Exercice 8 : Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a > 0$ et b des réels tels que

$$\lim_{t \to \infty} f'(t) + af(t) = b$$

Montrer que $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = \dfrac{b}{a}$ et $\lim\limits_{t \to \infty} f'(t) = 0$

Exercice 9 : Soient t_0 un réel positif, y_0 un réel et y une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant pour tout t positif :

$$\begin{cases} y'(t) \leq cy(t) + b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

1. Dans le cas ou $t_0 = b = 0$, montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+, \ y(t) \leq y_0 \ e^{ct}$, on pourra commencer par multiplier l'inégalité par e^{-ct}.
2. Dans le cas ou $t_0 = 0$, montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+, \ y(t) \leq y_0 e^{ct} + \frac{b}{c}(e^{ct} - 1)$.
3. Montrer que $\forall t \in [t_0, +\infty[, \ y(t) \leq y_0 e^{c(t-t_0)} + \frac{b}{c}(e^{c(t-t_0)} - 1)$.

Exercice 10 : Soit (y_n) une suite réelle telle que $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{k} \leq \ cy_{n+1} + b$, où $k > 0$ et $1 - kc > 0$.

Établir à l'aide d'une télescopie que $y_{n+1} \leq \dfrac{y_0}{(1-kc)^{n+1}} + \dfrac{b}{c}\left(\dfrac{1}{(1-kc)^{n+1}} - 1\right)$, on pourra pour cela utiliser une suite auxiliaire.

Exercice 11 : Soit (θ_n) une suite positive vérifiant pour tout n l'inégalité

$$\theta_{n+1} \leq (1 + \lambda h)\theta_n + \varepsilon_n$$

1. Montrer que : $\theta_N \leq (1 + \lambda h)^N \left(\theta_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} |\varepsilon_k|\right)$.
2. En déduire que pour $Nh \leq 1$, on a $\theta_N \leq e^{\lambda} \left(\theta_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} |\varepsilon_k|\right)$.

Troisième Année
Licence de mathématiques
Analyse Numérique
2014/2015

TD 5 : Équations différentielles, méthodes numériques

Exercice 1 : Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, L-lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Soit y la solution sur $[x_0, x_0+a]$ de

$$(E)\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & f(x,y) \\ y(x_0) & = & \lambda \end{array}\right.$$

où λ est donné.

1. Montrer que y est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_0, x_0+a]$?
   Soit le schéma d'Euler suivant : $y_{n+1} - y_n = hf(x_n, y_n)$ où $x_n = x_0 + hn$, $x_N = x_0 + a$,
   y_0 donné à priori différent de λ
2. Soit $\epsilon_n = y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_n, y(x_n))$. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que l'on a
$$|\epsilon_n| \leq h\int_{x_n}^{x_{n+1}} |y''(s)|\, ds$$
3. Soit $e_n = y(x_n) - y_n$ l'erreur de discrétisation.
   (a) Montrer que : $|e_{n+1}| \leq (1+hL)|e_n| + |\epsilon_n|$.
   (b) Montrer que pour $A > 0$, on a : $(1+A)^n \leq \mathrm{e}^{An}$.
   (c) En déduire que
$$|e_N| \leq e^{La}|e_0| + h\int_{x_0}^{x_N} e^{L(x_N - s)}|y''(s)|\, ds$$
4. Lorsque l'on utilise la méthode d'Euler sur un ordinateur, du fait de l'accumulation des erreurs d'arrondi, la valeur approchée calculée n'est pas y_n mais y_n^* qui satisfait le schéma perturbé :
   $y_{n+1}^* = y_n^* + hf(x_n, y_n^*) + h\mu_n + \rho_n$, $y_0^* = y_0$ avec $|\mu_n| \leq \mu$ et $|\rho_n| \leq \rho$ où μ et ρ sont connues. On pose $e_n^* = y(x_n) - y_n^*$
   (a) Soit $\bar{e}_n = y_n^* - y_n$. Montrer que : $|\bar{e}_{n+1}| \leq (1+hL)|\bar{e}_n| + h\mu + \rho$.
   (b) En déduire que $|\bar{e}_{n+1}| \leq (\mu + \frac{\rho}{h})a\mathrm{e}^{La}$.
   (c) Établir qu'il existe des constantes A, B et C indépendantes de h et de ρ tels que
$$|e_n^*| \leq \phi(h) = A + Bh + \frac{C\rho}{h}$$
   (d) En déduire l'existence de h pour lequel la majoration de l'erreur est optimale.

Exercice 2 : On considère l'équation différentielle

$$\left\{\begin{array}{l} y'(x) = \frac{y}{\log(2+y^2+x^2)} \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$$

1. Montrer que la fonction $f(x,y) = \frac{y}{\log(2+y^2+x^2)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que sa dérivée par rapport à y est bornée, donnez en un majorant de la valeur absolue.
2. En déduire l'existence et l'unicité d'une solution.
3. On considère le schéma sur $[0,a]$, $h = \frac{a}{N}$, $t_n = nh$,
$$\left\{\begin{array}{l} y_{n+1}^N - y_n^N = h\frac{y_n^N + h}{\log(2+(y_n^N)^2+t_n^2+h^2)} \\ y(0) = h+1 \end{array}\right.$$
   Donner la fonction ϕ définissant le schéma. Montrer que ce schéma est stable et consistant. Est t'il d'ordre 2 ? Donner une majoration de l'erreur.

Exercice 3 : On se donne f de classe C^∞ sur $[t_0, t_0+K] \times \mathbb{R}$, k-lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1]$. On considère le schéma à un pas défini par la suite

$$y_{n+1} = y_n + h\Big[\alpha f(t_n, y_n) + \beta f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)) + \gamma f(t_n + h, y_n + h f(t_n, y_n))\Big], \quad (t_n = t_0 + nh)$$

1. Déterminer la fonction Φ du schéma ?
2. Ce schéma est-il stable, consistant, convergent ?
3. A quelles conditions sur α, β, γ ce schéma est-il d'ordre supérieur ou égal à 1 ?
4. A quelles conditions sur α, β, γ ce schéma est-il d'ordre supérieur ou égal à 2 ?
5. Ce schéma peut il être d'ordre supérieur ou égal à 3 ?
6. On suppose que les conditions précédentes sont réalisées. Que faut-il imposer sur e_0 pour que $e_n = O(\frac{1}{n^2})$?

Exercice 4 : On considère le problème différentiel suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & f(t, y(t)) \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$$

avec $t > 0$ et $f(t,y) = \arctan(ty)$

1. Montrer que (P) possède une unique solution maximale.
2. Soit $a > 0$ tel que la solution précédente soit définie sur $[0, a]$. Montrer que cette solution reste bornée sur $[0, a]$ par la constante $Y = 1 + \frac{\pi a}{2}$.
3. Montrer que le dérivées symboliques $f^{[k]}$ pour $k = 0, 1, 2$ sont lipchitziennes par rapport à la deuxième variable sur $[0, a] \times [-Y, Y]$. On notera L^0, L^1, et L^2 leurs coefficients de Lipschitz respectifs. Proposer des coefficients L^0 et L^1 en fonction de Y et de a.
4. On considère la fonction $\phi(t, y, h) = f(t, y) + \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \frac{h^k f^{[k]}(t, y)}{(k+1)!}$ et le schéma suivant pour approcher la solution sur $[0, a]$: $y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h)$, $\quad y_0 = 1$, où $h = \frac{a}{N}$, $N \geq 1$, $n \leq N$, $t_n = nh$.
   (a) Montrer que ϕ est lipschitzienne par rapport à y sur $[0, a] \times [-Y, Y] \times [0, h^*]$ pour un certain h^* tel que $0 < h^* < a$ et calculer son coefficient de Lipschitz en fonction des coefficients L^k, $k = 0, 1, 2$.
   (b) Donner l'ordre du schéma.
   (c) En supposant que pour tout $n \leq N$, on a $|y_n| \leq Y$, montrer que le schéma converge.
   (d) Donner une majoration de l'erreur $e_n = |y(t_n) - y_n|$ en fonction de h. On ne demande pas de constante explicite mais seulement un ordre de grandeur.
5. Comment construire dans le même esprit un schéma d'ordre p pour p entier ? Justifier.

Exercice 5 : Soit $f(x, y) = \frac{1}{1+\sin^2(x^2+y)}$

1. Montrer que f est Lipshitzienne par rapport à la deuxième variable. Donner un coefficient de Lipshitz sur $[-1, 1] \times \mathbb{R}$.
2. En déduire l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation

$$\left\{ \begin{array}{ll} y'(x) & = \frac{1}{1+\sin^2(x^2+y)} \\ y(0) & = 1 \end{array} \right.$$

   Soit $h = \frac{1}{N}$, $n = 0, 1, N$

   On considère l'approximation par différences finies

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y^h_{n+1} - y^h_n}{h} = \frac{1+h}{1+\sin^2((n^2h^2) + y^h_n + h)} \quad , n \in [1, N] \\ y^h_0 = h^2 \end{array} \right.$$

3. Donner la fonction $\phi(x, y, h)$.
4. Montrer que cette approximation est consistante avec l'équation différentielle.
5. Montrer qu'elle est stable.
6. On calculera une constante de Lipschitz de ϕ par rapport à la variable y.
7. En déduire que l'erreur est en $O(h)$. Le schéma est il d'ordre 2 ?