Université de Cergy Pontoise
Licence de Mathématiques L3M
Méthodes variationnelles
2009-2010

Feuille de TD 2
Applications linéaires continues

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme 1 définie par $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la norme matricielle associée. Calculer la norme des matrices

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme associée.

a) Soit X un élément de $\mathbb{R}^n$, montrer que le carré de la norme de MX est ${}^tX{}^tMMX$.

b) Montrer que $S = {}^tMM$ est une matrice symétrique, on rappelle que toute matrice symétrique S possède une base orthonormale de vecteurs propres (théorème spectral), ceci revient à dire qu'il existe une matrice Ω telle que ${}^t\Omega = \Omega^{-1}$ et ${}^t\Omega S \Omega$ est diagonale.

c) En déduire que $\|MX\|^2 \leq \lambda_M \|X\|^2$ où λ_M est le rayon spectrale de ${}^tMM$, c'est à dire le maximum des valeurs absolues des valeurs propres de S :

$$\lambda_M = \max\{|\lambda| \in \mathbb{R}/\lambda \text{ est une valeur propre de } {}^tMM\}.$$

d) Montrer qu'il existe un X tel que $\|MX\|^2 = \lambda_M \|X\|^2$. En déduire que la norme matricielle associée à la norme euclidienne d'une matrice M est la racine carrée du rayon spectrale de ${}^tMM$. Calculer la norme des matrices

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé et f un endomorphisme de E.

a) Rappeler la définition d'une valeur propre de f.

b) Soit λ une valeur propre de f, montrer que la norme de f est supérieure ou égale à la valeur absolue de λ.

Exercice 4. Soient E et F deux espaces vectoriels normés et f une application linéaire de E dans F. Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :
i) f est continue en 0.
ii) f est continue.
iii) f est bornée sur la boule unité de E.

Exercice 5. Soient E et F deux e.v.n. et f une application linéaire de E dans F. Montrer que

$$\sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Exercice 6. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes réels. On définit sur E la norme, $\|P\| = \sup |a_i|$ si $P(X) = \sum a_i X^i$. Soient g_i les applications définies par : $g_1(P) = X^2 P$, $g_2(P) = P(1/2)$, $g_3(P) = P'$, $g_4(P) = P(0)^2 X$.

a) Déterminer celles qui sont linéaires.

b) Montrer que seules g_1, g_2 et g_4 sont continues.

c) Déterminer leur norme.

Exercice 7. Considérons $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne.

a) Montrer qu'une suite d'éléments $z_n = (x_n, y_n)$ de $\mathbb{R}^2$ tend vers 0 si et seulement si chacune de ses composantes x_n et y_n tend vers 0 dans $\mathbb{R}$.

b) Même question pour l'ensemble des matrices 2×2 muni de la norme associée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$ (montrer qu'une suite de matrice 2×2 tend vers 0 pour cette norme si et seulement chaque coefficient tend vers 0 dans $\mathbb{R}$).

Exercice 8. Soit $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (avec $\mathbb{R}^2$ muni de la même norme).

a) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout n, $\|P^n\| \leq M$.

b) Pour $|\lambda| < 1$ calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k P^k$. Comparer avec $(Id - \lambda P)^{-1}$.

c) Mêmes questions avec P un projecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$.

d) Mêmes questions pour $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

e) Mêmes questions pour $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 9. Soit ℓ^∞ l'espace des suites bornées, muni de la norme infinie (on rappelle que c'est un espace de Banach, ce qui est inutile ici). Soit T l'application de ℓ^∞ dans lui-même, telle que $T((x_n)) = (t_n)$ où

$$t_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_i, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

a) Quelle est l'image de la suite constante $u_n = 1$?

b) Montrer que $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty)$ et déterminer $\|T\|_{\mathcal{L}(\ell^\infty)}$.

Exercice 10. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme associée, et soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\|X\| < 1$.

a) Montrer que la série $\sum_{k\geq 0}(-1)^k X^k$ vérifie le critère de Cauchy.

b) Notons S la somme de la série $\sum_{k\geq 0}(-1)^k X^k$. Montrer que $SX = XS = -S + I$.

c) Montrer que $I + X$ est inversible.

d) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer que pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\|H\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, $A + H$ est inversible et que

$$\|(A+H)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}H\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|H\|}.$$

Exercice 11. Définissons pour $x, y \in \mathbb{R}^2$ la fonction : $(\phi(x))(y) = 4x_1y_1 + x_2y_2$. On note $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, la norme euclidienne standard.

a) Pour $x \in \mathbb{R}^2$ fixé, déterminer la norme de $\phi(x) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

b) Montrer que ϕ est bien une fonction dans $L(\mathbb{R}^2, L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$. Déterminer ensuite sa norme.

Exercice 12. Soient E, F et G des espaces vectoriels normés et Ψ une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. On prend comme norme sur $E \times F$ la norme $\|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

a) Montrer l'équivalence entre :

i) Il existe une constante M telle que $\forall x \in \mathcal{B}(0,1), \forall y \in \mathcal{B}(0,1),\ \|\Psi(x, y)\| \leq M$.

ii) Ψ est continue en $(0, 0)$.

iii) Ψ est continue.

b) On suppose que $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie. Soit Ψ l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, \Psi(\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^1 \varphi_1(x)\varphi_2(x)\mathrm{d}x.$$

Montrer que Ψ est une forme bilinéaire continue.