Université de Cergy Pontoise
Licence de Mathématiques L3M
Méthodes variationnelles
2009-2010

Feuille de TD 5
Théorème d'inversion locale

Exercice 1. Est-ce que l'application $f(h) = Ah$ avec $h \in \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ admet une application inverse ? f est-elle un C^1-difféomorphisme, si oui de $\mathbb{R}^3$ dans quel ensemble ?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (e^y + e^z, e^x - e^z, x)$. Montrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur son image, et que $f(\mathbb{R}^3)$ est strictement inclus dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.
a) Montrer que l'application $x \mapsto \tan x$ est un C^1-difféomorphisme de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$.
b) Soit $g(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x$, montrer que g est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans un intervalle que l'on déterminera.

Exercice 4. Les applications suivantes sont-elles des C^1-difféomorphismes locaux ? globaux ?
a) $f(x) = Ax$ sur $\mathbb{R}^N$, où A est une matrice fixée dans $GL_N(\mathbb{R})$.
b) $(x, y) = f(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$ de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ dans $(\mathbb{R}^2)^*$.
c) On restreint la fonction f de la question précedente à $\mathbb{R}_+^* \times] - \pi; \pi[$, on note alors Ψ sa fonction réciproque locale de f donnée dans b), déterminer $\Psi'(x, y)$. En déduire les expressions de $\partial_x\theta$ et $\partial_y\theta$. Vérifier que ces résultats sont les mêmes, obtenues par le calcul formel avec la "formule" $\theta = \arctan(y/x)$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, xy)$.
a) Calculer la différentielle de f sur $\mathbb{R}^2$ et montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
b) Quel est l'ensemble U des (x, y) où f est inversible localement ?
c) Soit $U_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > x\}$ et $V_0 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2, s^2 - 4t > 0\}$, montrer que $f|_{U_0}$ est un C^1-difféomorphisme de U_0 dans V_0.
d) Exprimer Df^{-1} sur V_0.

Exercice 6. Soit $S : A \mapsto A^2$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-ce que S admet une application inverse C^1 locale R telle que $R(I) = -I$?

Exercice 7. Soit $E = S_N(\mathbb{R})$ l'espace des matrices $N \times N$ symétriques. Notons U l'ensemble des matrices $A \in E$ définies positives (ceci est équivalent au fait que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives). On rappelle que toute matrice symétrique A est diagonalisable dans une base orthonormale, i.e. il existe P inversible et D diagonale tels que $A = PDP^{-1}$ et ${}^tPP = I$. On munit $\mathbb{R}^N$ de la norme euclidienne, et E de la norme associée. On rappelle que $A \in U$ ssi $\exists \lambda > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$, $\langle Ax, x\rangle \geq \lambda \|x\|^2$.
a) En déduire que pour tout $A \in U$, il existe $\lambda > 0$ tel que $B(A, \lambda/2) \subset U$.
b) Montrer que U est ouvert dans E.
c) Soit $\phi(A) = A^2$, montrer que $Ker(\phi'(A)) = \{0_E\}$, pour tout $A \in U$. (On peut d'abord montrer que c'est le cas pour une matrice diagonale dans U).

d) On admet que ϕ est une bijection de U dans U, montrer que ϕ est un C^1-difféomorphisme de U sur U. Notons $\Psi = \phi^{-1}$ sur U. Soit $D = diag(\lambda_i) \in U$, montrer que

$$\Psi'(D) \cdot H = \left(\frac{h_{ij}}{\sqrt{\lambda_i} + \sqrt{\lambda_j}} \right), \quad \forall\, H = (h_{ij}) \in E.$$

Exercice 8. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $|ab| < 1$. Soit $F(x,y) = (x + a \sin y, y + b \sin x)$. On veut montrer que F est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $F'(x,y)$ est inversible

b) Montrer que F est injective sur $\mathbb{R}^2$ et que $F(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

c) Montrer que $\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} \|F(x,y)\| = \infty$.

d) Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fixé. Notons $s(x,y) = \|F(x,y) - (x_0, y_0)\|^2$, montrer que $\inf_{\mathbb{R}^2} s(x,y)$ est atteint en un point A. Exprimer $s'(A)$, en déduire que $(x_0, y_0) \in F(\mathbb{R}^2)$.

e) Conclure.