MFA-M1 et MADOCS-M1
2008/2009
Analyse fonctionnelle et EDP

TD n^{o}1: Espaces de Hilbert

Exercice 1. Soit $\mathcal{H}$ un espace pré-hilbertien. Montrer que le produit scalaire et la norme sont des fonctions continues sur $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}$ respectivement.

Exercice 2: Identité du parallélogramme. Soit $(\mathcal{H},\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que $\|\cdot\|$ est engendrée par un produit scalaire ssi

$$\forall u,v\in\mathcal{H},\quad \|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\|u\|^2+2\|v\|^2.$$

Exercice 3. Soit $\mathcal{H}$ un espace pré-hilbertien complexe.

a) Montrer l'identité de polarisation sur $\mathcal{H}$:

$$\forall x,y\in\mathcal{H},\quad (x|y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2\right).$$

b) Soit $f\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que $\forall x\in\mathcal{H}$, $\|f(x)\|=\|x\|$. Montrer $\forall x,y\in\mathcal{H}$, $\big(f(x)|f(y)\big)=\big(x|y\big)$.

Exercice 4.

a) Vérifier que les espaces suivants sont des espaces pré-hilbertiens:

(1) l'espace l des suites complexes $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les éléments sont nuls à partir d'un certain rang, muni du produit scalaire $(x,y)=\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}x_n\bar{y}_n$;

(2) l'espace $C([a,b])$ des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$, muni du produit scalaire $(f,g)=\displaystyle\int_a^b f(x)\bar{g}(x)\mathrm{d}x$;

(3) l'espace $\mathcal{P}$ des polynômes complexes, muni du produit scalaire $(P,Q)=\displaystyle\int_{|z|<1}P(z)\bar{Q}(z)\mathrm{d}z$.

b) Montrer que les espaces suivants sont les complétions des espaces pré-hilbertiens considérés au a).

(1) l'espace l^2 des suites complexes $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\|x\|_{l^2}=\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n|^2\right)^{1/2}<\infty;$$

(2) l'espace $L^2(a,b)$ des fonctions mesurables de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ telles que

$$\|f\|_{L^2(a,b)}=\left(\int_a^b|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}<\infty;$$

(3) l'espace $\mathcal{A}(D)$ des fonctions analytiques f définies sur le disque $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$ telles que

$$\|f\|_{L^2(D)}=\left(\int_D|f(z)|^2\mathrm{d}z\right)^{1/2}<\infty.$$

c) Montrer que les espaces de Hilbert définis au b) sont séparables.

Exercice 5: Norme d'un opérateur. Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert.

a) Montrer qu'une application linéaire $A:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$ appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ si et seulement si

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)}:=\sup_{\|u\|_{\mathcal{H}_1}\le 1}\|Au\|_{\mathcal{H}_2}<\infty.$$

b) Soit $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$. Montrer que

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)}=\sup\{(Au,v)\,|\,\|u\|_{\mathcal{H}_1}\le 1,\ \|v\|_{\mathcal{H}_2}\le 1\}.$$

Exercice 6. Soit $\mathcal{H} = L^2(a,b)$ et $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On définit l'opérateur $a : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ par

$$(Au)(x) = \int_a^b k(x,y)u(y)\mathrm{d}y.$$

Montrer que $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et que

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \left(\max_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x,y)|\mathrm{d}y \right)^{1/2} \times \left(\max_{y\in[a,b]} \int_a^b |k(x,y)|\mathrm{d}x \right)^{1/2}$$

Exercice 7: Projection orthogonale. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\mathcal{H}_0$ un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ non réduit à $\{0\}$ et P l'application qui à un vecteur u associe sa projection orthogonale sur $\mathcal{H}_0$.

a) Montrer que $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, que $P^2 = P$ et que $\|P\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = 1$.

b) Montrer que pour tous vecteurs $u, v \in \mathcal{H}$ on a $(Pu, v) = (u, Pv) = (Pu, Pv)$.

c) Soit $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un projecteur, i.e. tel que $Q^2 = Q$. Montrer que Q est un projecteur orthogonal (sur un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$) si et seulement si $\|Q\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1$. (Indication: considérer des vecteurs de la forme $z_\lambda = \lambda(x - Px) + Py$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.)

Exercice 8: Projection sur un convexe fermé. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $K \subset \mathcal{H}$ un ensemble convexe fermé.

a) Montrer que pour tout $u \in \mathcal{H}$ il existe un unique $u_0 \in K$ tel que

$$\|u - u_0\| = \mathrm{dist}(u, K) := \inf_{v\in K} \|u - v\|.$$

b) Montrer que u_0 est l'unique élément de K tel que

$$(v - u_0, u - u_0) \leq 0, \qquad \forall v \in K.$$

Exercice 9. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée (ou base hilbertienne).

a) Montrer que les vecteurs e_n sont linéairement indépendants.

b) Soit $(x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ converge (dans $\mathcal{H}$) si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2$ converge (dans $\mathbb{R}$).

c) On rappelle qu'une famille $(f_j)_{j\in J}$ est une base *algébrique* d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E si pour tout $x \in E$ il existe $n \in \mathbb{N}$, $j_1, \ldots, j_n \in J$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ tels que $x = x_1 f_{j_1} + \cdots + x_n f_{j_n}$. En considérant le vecteur $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} e_n$, montrer que la base orthonormée $(e_n)_n$ n'est pas une base algébrique de $\mathcal{H}$.

Exercice 10: Convergence faible. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}$. On dit que:

- la suite $(x_n)_n$ converge fortement vers $x \in \mathcal{H}$ si $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$ (c'est la convergence usuelle);
- la suite $(x_n)_n$ converge faiblement vers $x \in \mathcal{H}$ si pour tout $y \in \mathcal{H}$ on a $\lim_{n\to\infty} (x_n, y) = (x, y)$.

a) Si $(x_n)_n$ converge faiblement vers x, montrer que x est la seule limite faible possible.

b) Si $(x_n)_n$ converge fortement vers x, montrer que $(x_n)_n$ converge faiblement vers x. En considérant la suite $(x_n)_n = (e_n)_n$ où $(e_n)_n$ est une base orthonormée, montrer que la réciproque est fausse.

c) Si $(x_n)_n$ converge faiblement vers x et si de plus $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$, montrer que $(x_n)_n$ converge fortement vers x.

Exercice 11. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{H}$, l'application $f_u : v \mapsto (v, u)$ appartient à $\mathcal{H}^*$ et que $\|f_u\|_{\mathcal{H}^*} = \|u\|_{\mathcal{H}}$.

Exercice 12: Adjoint d'un opérateur. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

a) Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que pour tous $x, y \in \mathcal{H}$ on ait $(u(x), y) = (x, v(y))$. Cet endomorphisme est appelé l'adjoint de u et on le notera u^*.

b) Vérifier que $(u^*)^* = u$.

c) Montrer que $\|u^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|u\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$.