Applications des interactions répétées en mécanique quantique

(Collaborations avec S. De Bièvre et C.A. Pillet)

Cergy, Novembre 2009

Syst. Quantiques avec Interactions Répétées (RIQS)

Un "petit" système $\mathcal{S}$:

- Système quantique gouverné par un hamiltonien $H_{\mathcal{S}}$ sur $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$.

Syst. Quantiques avec Interactions Répétées (RIQS)

Un "petit" système $\mathcal{S}$:

- Système quantique gouverné par un hamiltonien $H_{\mathcal{S}}$ sur $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$.

Une chaine $\mathcal{C}$ de sous-systèmes quantiques $\mathcal{E}_k \equiv \mathcal{E}$ $(k = 1, 2, \ldots)$:

- $\mathcal{C} = \mathcal{E} + \mathcal{E} + \cdots$
- Chaque $\mathcal{E}_k$ est gouverné par un hamiltonien $H_{\mathcal{E},k} = H_{\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.

Syst. Quantiques avec Interactions Répétées (RIQS)

Un "petit" système $\mathcal{S}$:

- Système quantique gouverné par un hamiltonien $H_{\mathcal{S}}$ sur $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$.

Une chaine $\mathcal{C}$ de sous-systèmes quantiques $\mathcal{E}_k \equiv \mathcal{E}$ $(k = 1, 2, \ldots)$:

- $\mathcal{C} = \mathcal{E} + \mathcal{E} + \cdots$
- Chaque $\mathcal{E}_k$ est gouverné par un hamiltonien $H_{\mathcal{E},k} = H_{\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.

Des interactions:

- Opérateurs $V_k \equiv V$ agissant sur $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.
- Une durée d'interaction $\tau > 0$.

Syst. Quantiques avec Interactions Répétées (RIQS)

Un "petit" système $\mathcal{S}$:

- Système quantique gouverné par un hamiltonien $H_{\mathcal{S}}$ sur $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$.

Une chaine $\mathcal{C}$ de sous-systèmes quantiques $\mathcal{E}_k \equiv \mathcal{E}$ $(k = 1, 2, \ldots)$:

- $\mathcal{C} = \mathcal{E} + \mathcal{E} + \cdots$
- Chaque $\mathcal{E}_k$ est gouverné par un hamiltonien $H_{\mathcal{E},k} = H_{\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.

Des interactions:

- Opérateurs $V_k \equiv V$ agissant sur $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.
- Une durée d'interaction $\tau > 0$.

Pour $t \in [(n-1)\tau, n\tau[$:

- $\mathcal{S}$ interagit avec $\mathcal{E}_n$,
- $\mathcal{E}_k$ évolue librement si $k \neq n$,

i.e. le système total est gouverné par

$$\widetilde{H}_n = H_{\mathcal{S}} + H_{\mathcal{E},n} + V_n + \sum_{k \neq n} H_{\mathcal{E},k} = H_n + \sum_{k \neq n} H_{\mathcal{E},k}.$$

La dynamique d'interactions répétées.

1. Hamiltonien total: $\widetilde{H_n} = H_n + \sum_{k \neq n} H_{\mathcal{E},k}$.

La dynamique d'interactions répétées.

1. Hamiltonien total: $\widetilde{H_n} = H_n + \sum_{k \neq n} H_{\mathcal{E},k}$.
2. Etat initial de $\mathcal{S}$: matrice densité $\rho \in \mathcal{J}_1(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$.

La dynamique d'interactions répétées.

1. Hamiltonien total: $\widetilde{H_n} = H_n + \sum_{k \neq n} H_{\mathcal{E},k}$.
2. Etat initial de $\mathcal{S}$: matrice densité $\rho \in \mathcal{J}_1(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$.
3. Etat initial de $\mathcal{E}$: $\rho_{\mathcal{E}} =$ état invariant.

La dynamique d'interactions répétées.

1. Hamiltonien total: $\widetilde{H_n} = H_n + \sum_{k\neq n} H_{\mathcal{E},k}$.
2. Etat initial de $\mathcal{S}$: matrice densité $\rho \in \mathcal{J}_1(\mathcal{H}_\mathcal{S})$.
3. Etat initial de $\mathcal{E}$: $\rho_\mathcal{E}$ = état invariant.

Après 0 interaction, l'état du système total est

$$\rho_0^{\text{tot}} := \qquad \rho \otimes \bigotimes_{k\geq 1} \rho_\mathcal{E}$$

La dynamique d'interactions répétées.

1. Hamiltonien total: $\widetilde{H_n} = H_n + \sum_{k\neq n} H_{\mathcal{E},k}$.
2. Etat initial de $\mathcal{S}$: matrice densité $\rho \in \mathcal{J}_1(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$.
3. Etat initial de $\mathcal{E}$: $\rho_{\mathcal{E}} =$ état invariant.

Après 1 interaction, l'état du système total est

$$\rho_1^{\text{tot}} := \quad \mathrm{e}^{-i\tau\widetilde{H_1}} \left(\rho \otimes \bigotimes_{k\geq 1} \rho_{\mathcal{E}}\right) \mathrm{e}^{i\tau\widetilde{H_1}}$$

La dynamique d'interactions répétées.

1. Hamiltonien total: $\widetilde{H_n} = H_n + \sum_{k\neq n} H_{\mathcal{E},k}$.
2. Etat initial de $\mathcal{S}$: matrice densité $\rho \in \mathcal{J}_1(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$.
3. Etat initial de $\mathcal{E}$: $\rho_{\mathcal{E}} =$ état invariant.

Après 2 interactions, l'état du système total est

$$\rho_2^{\mathrm{tot}} := \mathrm{e}^{-i\tau\widetilde{H_2}}\mathrm{e}^{-i\tau\widetilde{H_1}} \left(\rho \otimes \bigotimes_{k\geq 1} \rho_{\mathcal{E}}\right) \mathrm{e}^{i\tau\widetilde{H_1}}\mathrm{e}^{i\tau\widetilde{H_2}}$$

La dynamique d'interactions répétées.

1. Hamiltonien total: $\widetilde{H_n} = H_n + \sum_{k\neq n} H_{\mathcal{E},k}$.
2. Etat initial de $\mathcal{S}$: matrice densité $\rho \in \mathcal{J}_1(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$.
3. Etat initial de $\mathcal{E}$: $\rho_{\mathcal{E}} =$ état invariant.

Après n interactions, l'état du système total est

$$\rho_n^{\mathrm{tot}} := \mathrm{e}^{-i\tau\widetilde{H_n}} \cdots \mathrm{e}^{-i\tau\widetilde{H_2}} \mathrm{e}^{-i\tau\widetilde{H_1}} \left(\rho \otimes \bigotimes_{k\geq 1} \rho_{\mathcal{E}} \right) \mathrm{e}^{i\tau\widetilde{H_1}} \mathrm{e}^{i\tau\widetilde{H_2}} \cdots \mathrm{e}^{i\tau\widetilde{H_n}}.$$

La dynamique d'interactions répétées.

1. Hamiltonien total: $\widetilde{H_n} = H_n + \sum_{k\neq n} H_{\mathcal{E},k}$.
2. Etat initial de $\mathcal{S}$: matrice densité $\rho \in \mathcal{J}_1(\mathcal{H}_\mathcal{S})$.
3. Etat initial de $\mathcal{E}$: $\rho_\mathcal{E}$ = état invariant.

Après n interactions, l'état du système total est

$$\rho_n^{\mathrm{tot}} := \mathrm{e}^{-i\tau\widetilde{H_n}} \cdots \mathrm{e}^{-i\tau\widetilde{H_2}} \mathrm{e}^{-i\tau\widetilde{H_1}} \left(\rho \otimes \bigotimes_{k\geq 1} \rho_\mathcal{E}\right) \mathrm{e}^{i\tau\widetilde{H_1}} \mathrm{e}^{i\tau\widetilde{H_2}} \cdots \mathrm{e}^{i\tau\widetilde{H_n}}.$$

L'état de $\mathcal{S}$ est alors $\rho_n = \mathrm{Tr}_\mathcal{C}(\rho_n^{\mathrm{tot}})$, i.e. vérifie

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathcal{S}), \quad \mathrm{Tr}\left(\rho_n^{\mathrm{tot}}\, A \otimes \mathbb{1}_\mathcal{C}\right) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\mathcal{S}}\left(\rho_n A\right).$$

La dynamique d'interactions répétées.

1. Hamiltonien total: $\widetilde{H_n} = H_n + \sum_{k \neq n} H_{\mathcal{E},k}$.
2. Etat initial de $\mathcal{S}$: matrice densité $\rho \in \mathcal{J}_1(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$.
3. Etat initial de $\mathcal{E}$: $\rho_{\mathcal{E}}$ = état invariant.

Après n interactions, l'état du système total est

$$\rho_n^{\mathrm{tot}} := \mathrm{e}^{-i\tau\widetilde{H_n}} \cdots \mathrm{e}^{-i\tau\widetilde{H_2}}\mathrm{e}^{-i\tau\widetilde{H_1}} \left(\rho \otimes \bigotimes_{k\geq 1} \rho_{\mathcal{E}}\right) \mathrm{e}^{i\tau\widetilde{H_1}}\mathrm{e}^{i\tau\widetilde{H_2}} \cdots \mathrm{e}^{i\tau\widetilde{H_n}}.$$

L'état de $\mathcal{S}$ est alors $\rho_n = \mathrm{Tr}_{\mathcal{C}}(\rho_n^{\mathrm{tot}})$, i.e. vérifie

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{S}}), \quad \mathrm{Tr}\left(\rho_n^{\mathrm{tot}}\ A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{C}}\right) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}\left(\rho_n A\right).$$

Question: Comportement de $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}(\rho_n A)$ lorsque $n \to \infty$, soit pour tout A, i.e. comprendre ρ_n, soit pour certaines observables.

Utilisation de la structure RI: caractère markovien

Si $\mathcal{S}$ est dans l'état ρ avant l'interaction, après cette interaction il est dans l'état

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n(\rho) &:= \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{-i\tau\widetilde{H_n}}\rho\otimes\rho_{\mathcal{E}}\,\mathrm{e}^{i\tau\widetilde{H_n}}) \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\left(\mathrm{e}^{-i\tau H_n}\rho\otimes\rho_{\mathcal{E}}\,\mathrm{e}^{i\tau H_n}\right) \equiv \mathcal{L}(\rho), \end{aligned}$$

où $\mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}$ est la trace partielle par rapport à $\mathcal{E}$.

Utilisation de la structure RI: caractère markovien

Si $\mathcal{S}$ est dans l'état ρ avant l'interaction, après cette interaction il est dans l'état

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n(\rho) &:= \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}(\mathrm{e}^{-i\tau \widetilde{H}_n}\rho \otimes \rho_{\mathcal{E}}\,\mathrm{e}^{i\tau \widetilde{H}_n}) \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\left(\mathrm{e}^{-i\tau H_n}\rho \otimes \rho_{\mathcal{E}}\,\mathrm{e}^{i\tau H_n}\right) \equiv \mathcal{L}(\rho), \end{aligned}$$

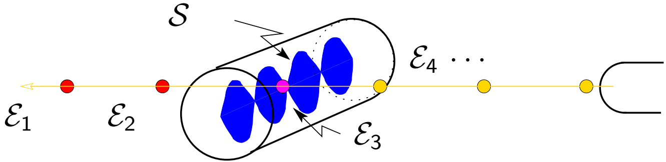
où $\mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}$ est la trace partielle par rapport à $\mathcal{E}$.
La structure "interactions répétées" entraine un caractère markovien:

$$\forall n, \quad \rho_n = \mathcal{L}(\rho_{n-1}) \quad \Rightarrow \quad \rho_n = \mathcal{L}^n(\rho),$$

où $\mathcal{L} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{J}_1(\mathcal{H}_{\mathcal{S}}) & \to & \mathcal{J}_1(\mathcal{H}_{\mathcal{S}}) \\ \rho & \mapsto & \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\left(\mathrm{e}^{-i\tau H}\rho \otimes \rho_{\mathcal{E}}\,\mathrm{e}^{i\tau H}\right) \end{array} \right.$

Les One-atom masers

Les "One-atom masers" (Walther et al '85, Haroche et al '92)



- $\mathcal{S}=$ un mode du champ EM dans une cavité optique.
- $\mathcal{E}_k=$ k-ème atome interagissant avec le champ.
- $\mathcal{C}$: faisceau d'atomes envoyé dans la cavité.

Modélisation du one-atom maser

1. Le champ EM dans la cavité: ($\simeq$ un oscillateur harmonique).
$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = \Gamma_s(\mathbb{C}), \quad H_{\mathcal{S}} = \omega a^* a = \omega N.$$
On note $|n\rangle$ les états propres de $H_{\mathcal{S}}$: $H_{\mathcal{S}}|n\rangle = n\omega|n\rangle$. L'état $|n\rangle$ décrit l'état du champ EM lorsque n photons sont présents.

Modélisation du one-atom maser

1. Le champ EM dans la cavité: ($\simeq$ un oscillateur harmonique).
$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = \Gamma_s(\mathbb{C}), \quad H_{\mathcal{S}} = \omega a^* a = \omega N.$$
On note $|n\rangle$ les états propres de $H_{\mathcal{S}}$: $H_{\mathcal{S}}|n\rangle = n\omega|n\rangle$. L'état $|n\rangle$ décrit l'état du champ EM lorsque n photons sont présents.

2. Les atomes: atomes à 2 niveaux.
$$\mathcal{H}_{\mathcal{E}} = \mathbb{C}^2, \quad H_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega_0 \end{pmatrix}.$$
On note $|-\rangle$, $|+\rangle$ les états propres associés.
Avec $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ l'opérateur d'annihilation sur $\mathbb{C}^2$ ($b|+\rangle = |-\rangle$ et $b|-\rangle = 0$), on a $H_{\mathcal{E}} = \omega_0 b^* b$.

Modélisation du one-atom maser

1. Le champ EM dans la cavité: ($\simeq$ un oscillateur harmonique).
$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = \Gamma_s(\mathbb{C}), \quad H_{\mathcal{S}} = \omega a^* a = \omega N.$$
On note $|n\rangle$ les états propres de $H_{\mathcal{S}}$: $H_{\mathcal{S}}|n\rangle = n\omega|n\rangle$. L'état $|n\rangle$ décrit l'état du champ EM lorsque n photons sont présents.
2. Les atomes: atomes à 2 niveaux.
$$\mathcal{H}_{\mathcal{E}} = \mathbb{C}^2, \quad H_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega_0 \end{pmatrix}.$$
On note $|-\rangle$, $|+\rangle$ les états propres associés.
Avec $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ l'opérateur d'annihilation sur $\mathbb{C}^2$ ($b|+\rangle = |-\rangle$ et $b|-\rangle = 0$), on a $H_{\mathcal{E}} = \omega_0 b^* b$.
3. L'interaction: processus d'échange, i.e. $V = \frac{\lambda}{2}(a \otimes b^* + a^* \otimes b)$.

Modélisation du one-atom maser

1. Le champ EM dans la cavité: ($\simeq$ un oscillateur harmonique).
$$\mathcal{H}_\mathcal{S} = \Gamma_s(\mathbb{C}), \quad H_\mathcal{S} = \omega a^* a = \omega N.$$
On note $|n\rangle$ les états propres de $H_\mathcal{S}$: $H_\mathcal{S}|n\rangle = n\omega|n\rangle$. L'état $|n\rangle$ décrit l'état du champ EM lorsque n photons sont présents.
2. Les atomes: atomes à 2 niveaux.
$$\mathcal{H}_\mathcal{E} = \mathbb{C}^2, \quad H_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega_0 \end{pmatrix}.$$
On note $|-\rangle$, $|+\rangle$ les états propres associés.
Avec $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ l'opérateur d'annihilation sur $\mathbb{C}^2$ ($b|+\rangle = |-\rangle$ et $b|-\rangle = 0$), on a $H_\mathcal{E} = \omega_0 b^* b$.
3. L'interaction: processus d'échange, i.e. $V = \frac{\lambda}{2}(a \otimes b^* + a^* \otimes b)$.

C'est l'hamiltonien de Jaynes-Cummings (interaction dipolaire dans l'approximation des ondes tournantes).

Etat initial des atomes: $\rho_\beta =$ état d'équilibre à température β^{-1}, i.e. $\rho_\beta = \frac{\mathrm{e}^{-\beta H_{\mathcal{E}}}}{\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta H_{\mathcal{E}}})}$.

Etat initial des atomes: $\rho_\beta =$ état d'équilibre à température β^{-1}, i.e. $\rho_\beta = \frac{\mathrm{e}^{-\beta H_{\mathcal{E}}}}{\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta H_{\mathcal{E}}})}$.

Question: A-t-on thermalisation de la cavité?

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \frac{\mathrm{e}^{-\beta^* H_S}}{\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta^* H_S})} \text{ ?}$$

Etat initial des atomes: $\rho_\beta =$ état d'équilibre à température β^{-1}, i.e. $\rho_\beta = \frac{\mathrm{e}^{-\beta H_{\mathcal{E}}}}{\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta H_{\mathcal{E}}})}$.

Question: A-t-on thermalisation de la cavité? A quelle température?

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \frac{\mathrm{e}^{-\beta^* H_S}}{\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta^* H_S})} \text{ ?} \qquad \beta^* = \text{ ?}$$

Etat initial des atomes: $\rho_\beta =$ état d'équilibre à température β^{-1}, i.e. $\rho_\beta = \frac{\mathrm{e}^{-\beta H_{\mathcal{E}}}}{\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta H_{\mathcal{E}}})}$.
Question: A-t-on thermalisation de la cavité? A quelle température?

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \frac{\mathrm{e}^{-\beta^* H_S}}{\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta^* H_S})} \text{ ?} \qquad \beta^* = \text{?}$$

Il faut comprendre $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}^n(\rho)$, et donc le spectre de $\mathcal{L}$ (en particulier son/ses état(s) invariant(s)).

Etat initial des atomes: $\rho_\beta =$ état d'équilibre à température β^{-1}, i.e. $\rho_\beta = \frac{\mathrm{e}^{-\beta H_\mathcal{E}}}{\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta H_\mathcal{E}})}$.
Question: A-t-on thermalisation de la cavité? A quelle température?

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \frac{\mathrm{e}^{-\beta^* H_S}}{\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta^* H_S})} \; ? \qquad \beta^* = \; ?$$

Il faut comprendre $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{L}^n(\rho)$, et donc le spectre de $\mathcal{L}$ (en particulier son/ses état(s) invariant(s)).

Difficulté principale: pas de théorie de perturbation!
Si $\lambda = 0$, $\mathcal{L}(\rho) = \mathrm{e}^{-i\tau H_S}\rho\,\mathrm{e}^{i\tau H_S}$ $\Rightarrow \mathrm{sp}(\mathcal{L}) = \{\mathrm{e}^{i\tau\omega(n-m)},\ n,m \in \mathbb{N}\}$: spectre purement ponctuel mais toutes les valeurs propres, et en particulier 1, sont infiniment dégénérées!

Outils pour l'analyse spectrale de $\mathcal{L}$

1. Calcul explicite de e^{-itH} (H est "quadratique"), puis de $\mathcal{L}$.

Outils pour l'analyse spectrale de $\mathcal{L}$

1. Calcul explicite de e^{-itH} (H est "quadratique"), puis de $\mathcal{L}$.
2. Utiliser la symétrie de jauge: $[H, a^*a + b^*b] = [H_{\mathcal{E}}, \rho_\beta] = 0$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}(\mathrm{e}^{-i\theta H_S}\rho\,\mathrm{e}^{i\theta H_S}) = \mathrm{e}^{-i\theta H_S}\mathcal{L}(\rho)\,\mathrm{e}^{i\theta H_S}.$$

Outils pour l'analyse spectrale de $\mathcal{L}$

1. Calcul explicite de e^{-itH} (H est "quadratique"), puis de $\mathcal{L}$.
2. Utiliser la symétrie de jauge: $[H, a^*a + b^*b] = [H_\mathcal{E}, \rho_\beta] = 0$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}(\mathrm{e}^{-i\theta H_S}\rho\,\mathrm{e}^{i\theta H_S}) = \mathrm{e}^{-i\theta H_S}\mathcal{L}(\rho)\,\mathrm{e}^{i\theta H_S}.$$

Conséquence: les sous-espaces $E_k = \{\rho = \sum p_n |n+k\rangle\langle n|\}$ de $\mathcal{J}_1$ sont globalement invariants.

Outils pour l'analyse spectrale de $\mathcal{L}$

1. Calcul explicite de e^{-itH} (H est "quadratique"), puis de $\mathcal{L}$.
2. Utiliser la symétrie de jauge: $[H, a^*a + b^*b] = [H_{\mathcal{E}}, \rho_\beta] = 0$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}(\mathrm{e}^{-i\theta H_S}\rho\,\mathrm{e}^{i\theta H_S}) = \mathrm{e}^{-i\theta H_S}\mathcal{L}(\rho)\,\mathrm{e}^{i\theta H_S}.$$

   Conséquence: les sous-espaces $E_k = \{\rho = \sum p_n |n+k\rangle\langle n|\}$ de $\mathcal{J}_1$ sont globalement invariants.
3. Action de $\mathcal{L}$ sur les états diagonaux, i.e. sur E_0

Outils pour l'analyse spectrale de $\mathcal{L}$

1. Calcul explicite de e^{-itH} (H est "quadratique"), puis de $\mathcal{L}$.
2. Utiliser la symétrie de jauge: $[H, a^*a + b^*b] = [H_\mathcal{E}, \rho_\beta] = 0$
$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}(\mathrm{e}^{-i\theta H_S}\rho\,\mathrm{e}^{i\theta H_S}) = \mathrm{e}^{-i\theta H_S}\mathcal{L}(\rho)\,\mathrm{e}^{i\theta H_S}.$$
Conséquence: les sous-espaces $E_k = \{\rho = \sum p_n |n+k\rangle\langle n|\}$ de $\mathcal{J}_1$ sont globalement invariants.
3. Action de $\mathcal{L}$ sur les états diagonaux, i.e. sur E_0: avec $(\nabla\rho)_n := \rho_n - \rho_{n-1}$, $(\nabla^*\rho)_n = \rho_n - \rho_{n+1}$ et $D(N) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\beta\omega_0}}\sin^2(\pi\sqrt{\xi N + \eta})\dfrac{\xi N}{\xi N + \eta}$, où $\xi = \left(\frac{\lambda\tau}{2\pi}\right)^2$ et $\eta = \left(\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2\pi}\right)^2$, on a
$$\mathcal{L} = \mathbb{1} - \nabla^* D(N)\mathrm{e}^{-\beta\omega_0 N}\nabla\mathrm{e}^{\beta\omega_0 N}.$$

Outils pour l'analyse spectrale de $\mathcal{L}$

1. Calcul explicite de e^{-itH} (H est "quadratique"), puis de $\mathcal{L}$.
2. Utiliser la symétrie de jauge: $[H, a^*a + b^*b] = [H_{\mathcal{E}}, \rho_\beta] = 0$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}(\mathrm{e}^{-i\theta H_S}\rho\,\mathrm{e}^{i\theta H_S}) = \mathrm{e}^{-i\theta H_S}\mathcal{L}(\rho)\,\mathrm{e}^{i\theta H_S}.$$

   Conséquence: les sous-espaces $E_k = \{\rho = \sum p_n|n+k\rangle\langle n|\}$ de $\mathcal{J}_1$ sont globalement invariants.
3. Action de $\mathcal{L}$ sur les états diagonaux, i.e. sur E_0: avec $(\nabla\rho)_n := \rho_n - \rho_{n-1}$, $(\nabla^*\rho)_n = \rho_n - \rho_{n+1}$ et $D(N) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\beta\omega_0}}\sin^2(\pi\sqrt{\xi N + \eta})\dfrac{\xi N}{\xi N + \eta}$, où $\xi = \left(\frac{\lambda\tau}{2\pi}\right)^2$ et $\eta = \left(\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2\pi}\right)^2$, on a

$$\mathcal{L} = \mathbb{1} - \nabla^* D(N)\mathrm{e}^{-\beta\omega_0 N}\nabla\mathrm{e}^{\beta\omega_0 N}.$$

4. Un lemme de type Perron-Frobenius (Shrader '2000) sur les applications complètement positive sur les idéaux $\mathcal{J}_p$:

$$\mathcal{L}(X) = \mathrm{e}^{i\theta}X \Rightarrow \mathcal{L}(|X|) = |X| \text{ où } |X| = \sqrt{X^*X}.$$

Analyse spectrale de $\mathcal{L}$

- A l'aide de 2. on étudie $\mathcal{L}$ sur chaque E_k.

Analyse spectrale de $\mathcal{L}$

- A l'aide de 2. on étudie $\mathcal{L}$ sur chaque E_k.
- Avec 4. si $\mathcal{L}(X) = \mathrm{e}^{i\theta} X$ avec $X \in E_k$, on a $\mathcal{L}(|X|) = |X|$ avec $|X| \in E_0$.
  $\Rightarrow$ on cherche les états invariants de $\mathcal{L}$ sur E_0 à l'aide de 3.

Analyse spectrale de $\mathcal{L}$

- A l'aide de 2. on étudie $\mathcal{L}$ sur chaque E_k.
- Avec 4. si $\mathcal{L}(X) = \mathrm{e}^{i\theta} X$ avec $X \in E_k$, on a $\mathcal{L}(|X|) = |X|$ avec $|X| \in E_0$.
  $\Rightarrow$ on cherche les états invariants de $\mathcal{L}$ sur E_0 à l'aide de 3.
- On a
  $$\mathcal{L} = \mathbb{1} - \nabla^* D(N) \mathrm{e}^{-\beta\omega_0 N} \nabla \mathrm{e}^{\beta\omega_0 N}.$$
  Si $D(n)$ ne s'annule pas, ρ est invariant ssi
  $$\rho = C\mathrm{e}^{-\beta\omega_0 N} = C\mathrm{e}^{-\beta^* H_S} \text{ où } \beta^* = \frac{\omega_0}{\omega}\beta.$$

Hamiltonien de Jaynes-Cummings et oscillations de Rabi

En présence de n photons, la probabilité que l'atome effectue une transition $|-\rangle \to |+\rangle$ est une fonction périodique du temps,

$$P(t) = \left|\langle n-1,+|\, \mathrm{e}^{-itH}\, |n,-\rangle\right|^2 = \left(1 - \frac{\Delta^2}{\nu_n^2}\right) \sin^2\left(\frac{\nu_n t}{2}\right),$$

de fréquence

$$\nu_n := \sqrt{\lambda^2 n + (\omega - \omega_0)^2} = \sqrt{\lambda^2 n + \Delta^2}.$$

($\lambda =$ fréquence de Rabi à 1 photon dans une cavité où $\Delta = 0$).

Hamiltonien de Jaynes-Cummings et oscillations de Rabi

En présence de n photons, la probabilité que l'atome effectue une transition $|-\rangle \to |+\rangle$ est une fonction périodique du temps,

$$P(t) = \left|\langle n-1,+|\,\mathrm{e}^{-itH}\,|n,-\rangle\right|^2 = \left(1-\frac{\Delta^2}{\nu_n^2}\right)\sin^2\left(\frac{\nu_n t}{2}\right),$$

de fréquence

$$\nu_n := \sqrt{\lambda^2 n + (\omega-\omega_0)^2} = \sqrt{\lambda^2 n + \Delta^2}.$$

(λ = fréquence de Rabi à 1 photon dans une cavité où $\Delta = 0$).

Conclusion: Si le champ est dans l'état $|n\rangle$ au début d'une interaction et que τ est un multiple de la période de Rabi $T_n := \dfrac{2\pi}{\nu_n}$, après cette interaction il ne peut pas être dans létat $|n-1\rangle$: il y a un découplage entre les "niveaux" $n-1$ et n.

Résonances de Rabi

On dira que $n > 0$ est une résonance de Rabi si τ est un multiple de la période de Rabi à n photons, i.e.

$$\exists k \in \mathbb{N}, \ \tau = k \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2 n + (\omega - \omega_0)^2}}$$

Résonances de Rabi

On dira que $n > 0$ est une résonance de Rabi si τ est un multiple de la période de Rabi à n photons, i.e.

$$\exists k \in \mathbb{N},\ \tau = k\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2 n + (\omega - \omega_0)^2}} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ \xi n + \eta = k^2.$$

Résonances de Rabi

On dira que $n > 0$ est une résonance de Rabi si τ est un multiple de la période de Rabi à n photons, i.e.

$$\exists k \in \mathbb{N},\ \tau = k\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2 n + (\omega - \omega_0)^2}} \iff \exists k \in \mathbb{N},\ \xi n + \eta = k^2.$$

Rappel: $D(n) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\beta\omega_0}} \sin^2(\pi\sqrt{\xi n + \eta})\dfrac{\xi n}{\xi N + \eta}.$

Résonances de Rabi

On dira que $n > 0$ est une résonance de Rabi si τ est un multiple de la période de Rabi à n photons, i.e.

$$\exists k \in \mathbb{N},\ \tau = k\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2 n + (\omega - \omega_0)^2}} \iff \exists k \in \mathbb{N},\ \xi n + \eta = k^2.$$

Rappel: $D(n) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\beta\omega_0}} \sin^2(\pi\sqrt{\xi n + \eta})\dfrac{\xi n}{\xi N + \eta}$.

Conclusion: $D(n) = 0$ ssi n est une résonance de Rabi.

Résonances de Rabi

On dira que $n > 0$ est une résonance de Rabi si τ est un multiple de la période de Rabi à n photons, i.e.

$$\exists k \in \mathbb{N},\ \tau = k\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2 n + (\omega-\omega_0)^2}} \iff \exists k \in \mathbb{N},\ \xi n + \eta = k^2.$$

Rappel: $D(n) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\beta\omega_0}} \sin^2(\pi\sqrt{\xi n + \eta})\dfrac{\xi n}{\xi N + \eta}$.

Conclusion: $D(n) = 0$ ssi n est une résonance de Rabi.

"Génériquement" D ne s'annule pas $\Rightarrow \rho_{\mathcal{S}}^{\beta^*} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\beta^* H_{\mathcal{S}}}}{\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta^* H_{\mathcal{S}}})}$ avec $\beta^* = \dfrac{\omega_0}{\omega}\beta$ est le seul état invariant.

Retour à l'équilibre

Proposition

S'il n'y a pas de résonance, 1 *est la seule valeur propre de* $\mathcal{L}_\beta$ *sur* S^1 *et elle est simple. L'unique état invariant est* $\rho_{\mathcal{S}}^{\beta^*}$.

Retour à l'équilibre

Proposition

S'il n'y a pas de résonance, 1 est la seule valeur propre de $\mathcal{L}_\beta$ sur S^1 et elle est simple. L'unique état invariant est $\rho_{\mathcal{S}}^{\beta^*}$.

Théorème

S'il n'y a pas de résonance, $\rho_{\mathcal{S}}^{\beta^*}$ est ergodique, i.e. tout état initial converge (en moyenne ergodique) vers l'état $\rho_{\mathcal{S}}^{\beta^*}$.

Retour à l'équilibre

Proposition

S'il n'y a pas de résonance, 1 est la seule valeur propre de $\mathcal{L}_\beta$ sur S^1 et elle est simple. L'unique état invariant est $\rho_{\mathcal{S}}^{\beta^*}$.

Théorème

S'il n'y a pas de résonance, $\rho_{\mathcal{S}}^{\beta^*}$ est ergodique, i.e. tout état initial converge (en moyenne ergodique) vers l'état $\rho_{\mathcal{S}}^{\beta^*}$.

Remarque: $\simeq$ Théorème ergodique de Von Neumann.
Problème: $\mathcal{J}_1(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$ n'est pas réflexif.

Retour à l'équilibre

Proposition

S'il n'y a pas de résonance, 1 est la seule valeur propre de $\mathcal{L}_\beta$ sur S^1 et elle est simple. L'unique état invariant est $\rho_{\mathcal{S}}^{\beta^*}$.

Théorème

S'il n'y a pas de résonance, $\rho_{\mathcal{S}}^{\beta^*}$ est ergodique, i.e. tout état initial converge (en moyenne ergodique) vers l'état $\rho_{\mathcal{S}}^{\beta^*}$.

Remarque: $\simeq$ Théorème ergodique de Von Neumann.
Problème: $\mathcal{J}_1(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$ n'est pas réflexif.

Solution: considérer $\mathcal{L}^*$ (dual de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$) et passer en représentation GNS (de $(\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{S}}), \rho_{\mathcal{S}}^{\beta^*})$).

Cavité non-résonante: états métastables

Rappel: sur les états diagonaux,

$$\mathcal{L}_\beta = \mathbb{1} - \nabla^* D(N) \mathrm{e}^{-\beta\omega_0 N} \nabla \mathrm{e}^{\beta\omega_0 N}$$

avec $D(n) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\beta\omega_0}} \sin^2(\pi\sqrt{\xi n + \eta}) \frac{\xi n}{\xi n + \eta}$.

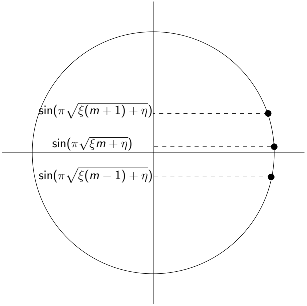
Cavité non-résonante: états métastables

Rappel: sur les états diagonaux,

$$\mathcal{L}_\beta = \mathbb{1} - \nabla^* D(N) \mathrm{e}^{-\beta\omega_0 N} \nabla \mathrm{e}^{\beta\omega_0 N}$$

avec $D(n) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\beta\omega_0}} \sin^2(\pi\sqrt{\xi n + \eta}) \frac{\xi n}{\xi n + \eta}$.

On dit que $m \in \mathbb{N}^*$ est une quasi-résonance si $D(m) < D(m \pm 1)$.



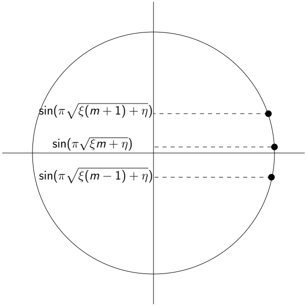
Cavité non-résonante: états métastables

Rappel: sur les états diagonaux,

$$\mathcal{L}_\beta = \mathbb{1} - \nabla^* D(N) \mathrm{e}^{-\beta\omega_0 N} \nabla \mathrm{e}^{\beta\omega_0 N}$$

avec $D(n) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\beta\omega_0}} \sin^2(\pi\sqrt{\xi n + \eta}) \frac{\xi n}{\xi n + \eta}$.

On dit que $m \in \mathbb{N}^*$ est une quasi-résonance si $D(m) < D(m \pm 1)$.



Si $(m_k)_k$ est la suite des quasi-résonances, on a $D(m_k) = O(k^{-2})$.

Cavité non-résonante: états métastables

Soit $\mathcal{L}_\beta^0 = \mathbb{1} - \nabla^* D_0(N) \mathrm{e}^{-\beta\omega_0 N} \nabla \mathrm{e}^{\beta\omega_0 N}$ avec

$$D_0(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \{m_1, \ldots\}, \\ D(n) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cavité non-résonante: états métastables

Soit $\mathcal{L}_\beta^0 = \mathbb{1} - \nabla^* D_0(N) \mathrm{e}^{-\beta\omega_0 N} \nabla \mathrm{e}^{\beta\omega_0 N}$ avec

$$D_0(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \{m_1, \ldots\}, \\ D(n) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors $\mathcal{L}_\beta = \mathcal{L}_\beta^0 + \mathcal{T}$ avec $\mathcal{T}$ de classe trace et 1 est valeur propre infiniment dégénérée de $\mathcal{L}_\beta^0$.

$\Rightarrow$ 1 est toujours dans le spectre essentiel de $\mathcal{L}_\beta$.

Cavité non-résonante: états métastables

Soit $\mathcal{L}_\beta^0 = \mathbb{1} - \nabla^* D_0(N) \mathrm{e}^{-\beta\omega_0 N} \nabla \mathrm{e}^{\beta\omega_0 N}$ avec

$$D_0(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \{m_1, \ldots\}, \\ D(n) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors $\mathcal{L}_\beta = \mathcal{L}_\beta^0 + \mathcal{T}$ avec $\mathcal{T}$ de classe trace et 1 est valeur propre infiniment dégénérée de $\mathcal{L}_\beta^0$.
$\Rightarrow$ 1 est toujours dans le spectre essentiel de $\mathcal{L}_\beta$.

Les états propres de $\mathcal{L}_\beta^0$ sont des états métastables du système.
$\Rightarrow$ Il y a une infinité d'états métastables avec des temps de vie arbitrairement longs. On ne peut donc pas avoir mélange exponentiel.

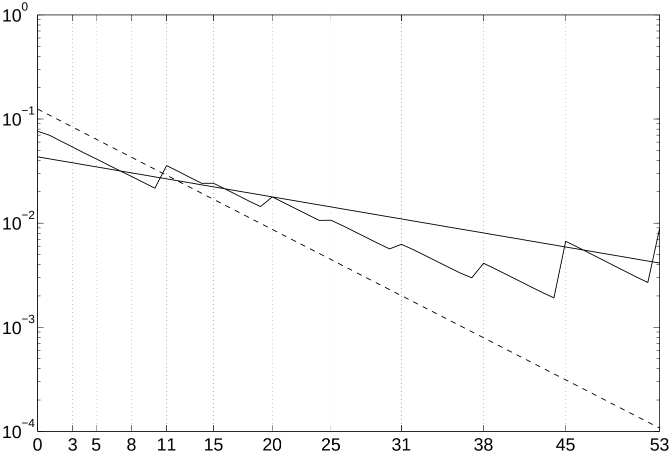


Figure: Cooling the cavity: 5000 interactions.

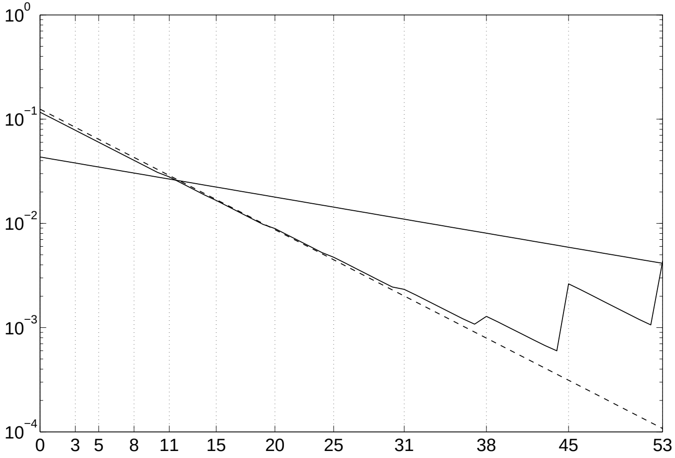


Figure: Cooling the cavity: 50000 interactions.

Modèle de liaisons fortes

- $\mathcal{S} =$ un électron dans l'approximation de liaisons fortes + champ électrique constant,i.e. $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = \ell^2(\mathbb{Z})$,

$$H_{\mathcal{S}} = -\Delta - FX = -2 + 2\cos(P) - FX = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2 - Fk)|\psi_k\rangle\langle\psi_k|.$$

Modèle de liaisons fortes

- $\mathcal{S} =$ un électron dans l'approximation de liaisons fortes + champ électrique constant,i.e. $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = \ell^2(\mathbb{Z})$,

$$H_{\mathcal{S}} = -\Delta - FX = -2 + 2\cos(P) - FX = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (2 - Fk)|\psi_k\rangle\langle\psi_k|.$$

Les oscillations de Bloch empêchent l'établissement d'un courant. Idée: le contact avec un environnement thermique entraine la création d'un tel courant.

Modèle de liaisons fortes

- $\mathcal{S} =$ un électron dans l'approximation de liaisons fortes + champ électrique constant,i.e. $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = \ell^2(\mathbb{Z})$,

$$H_{\mathcal{S}} = -\Delta - FX = -2 + 2\cos(P) - FX = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (2 - Fk)|\psi_k\rangle\langle\psi_k|.$$

  Les oscillations de Bloch empêchent l'établissement d'un courant. Idée: le contact avec un environnement thermique entraine la création d'un tel courant.
- $\mathcal{E} =$ systèmes à 2 niveaux commme précédemment (E l'énergie excitée).

Modèle de liaisons fortes

- $\mathcal{S} =$ un électron dans l'approximation de liaisons fortes + champ électrique constant,i.e. $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = \ell^2(\mathbb{Z})$,

$$H_{\mathcal{S}} = -\Delta - FX = -2 + 2\cos(P) - FX = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (2 - Fk)|\psi_k\rangle\langle\psi_k|.$$

  Les oscillations de Bloch empêchent l'établissement d'un courant. Idée: le contact avec un environnement thermique entraine la création d'un tel courant.

- $\mathcal{E} =$ systèmes à 2 niveaux commme précédemment (E l'énergie excitée).
- On note $T = \sum_k |k+1\rangle\langle k| = \sum_k |\psi_{k+1}\rangle\langle\psi_k| = \mathrm{e}^{-iP}$.

  $V = \lambda(T \otimes b^* + T^* \otimes b)$. (Si $F > 0$, T agit comme un opérateur d'annihilation.)

Modèle de liaisons fortes

Très similaire au modèle précédent:

Modèle de liaisons fortes

Très similaire au modèle précédent:

- on peut calculer e^{itH} et $\mathcal{L}$ explicitement,
- on a les même symétries, en particulier

$$\mathrm{e}^{-i\tau H_S}\mathcal{L}(\rho)\mathrm{e}^{i\tau H_S} = \mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{-i\tau H_S}\rho\,\mathrm{e}^{i\tau H_S}\right).$$

Modèle de liaisons fortes

Très similaire au modèle précédent:

- on peut calculer e^{itH} et $\mathcal{L}$ explicitement,
- on a les même symétries, en particulier

$$\mathrm{e}^{-i\tau H_S}\mathcal{L}(\rho)\mathrm{e}^{i\tau H_S} = \mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{-i\tau H_S}\,\rho\,\mathrm{e}^{i\tau H_S}\right).$$

Essentiellement 2 différences:

- $\mathrm{sp}(H_\mathcal{S}) = 2 - F\mathbb{Z}$ ($\omega\mathbb{N}$ pour l'oscillateur),
- $[T, T^*] = 0$ ($= \mathbb{1}$ dans le cas précédent).

Modèle de liaisons fortes

Très similaire au modèle précédent:

- on peut calculer e^{itH} et $\mathcal{L}$ explicitement,
- on a les même symétries, en particulier

$$\mathrm{e}^{-i\tau H_S}\mathcal{L}(\rho)\mathrm{e}^{i\tau H_S} = \mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{-i\tau H_S}\rho\,\mathrm{e}^{i\tau H_S}\right).$$

Essentiellement 2 différences:

- $\mathrm{sp}(H_S) = 2 - F\mathbb{Z}$ ($\omega\mathbb{N}$ pour l'oscillateur),
- $[T, T^*] = 0$ ($= \mathbb{1}$ dans le cas précédent).

Questions: transport de l'électron, i.e. comportement lorsque $n \to \infty$ de

$$\frac{\mathrm{Tr}(X\rho_n)}{n\tau} \overset{?}{\to} v, \quad \mathrm{Tr}((X - nv\tau)^2\rho_n) \sim ?$$

Electron + 1 système à 2 niveaux

Si l'électron est seul:

- $P(t) = \mathrm{e}^{itH_{\mathcal{S}}} P \mathrm{e}^{-itH_{\mathcal{S}}} = P + Ft$,
- $X(t) = X + \frac{4}{F} \sin\left(\frac{Ft}{2}\right) \sin\left(P + \frac{Ft}{2}\right)$.

Electron + 1 système à 2 niveaux

Si l'électron est seul:

- $P(t) = \mathrm{e}^{itH_S} P \mathrm{e}^{-itH_S} = P + Ft,$
- $X(t) = X + \frac{4}{F} \sin\left(\frac{Ft}{2}\right) \sin\left(P + \frac{Ft}{2}\right).$

S'il est couplé à 1 système à 2 niveaux:

- $P(t) = \mathrm{e}^{itH} P \mathrm{e}^{-itH} = P + Ft,$
- $X(t) = X + \frac{4}{F} \sin\left(\frac{Ft}{2}\right) \sin\left(P + \frac{Ft}{2}\right) + A \sin(\omega t) + B \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right),$
  où $\omega^2 = (E - F)^2 + 4\lambda^2.$

Electron + 1 système à 2 niveaux

Si l'électron est seul:

- $P(t) = \mathrm{e}^{itH_S} P \mathrm{e}^{-itH_S} = P + Ft$,
- $X(t) = X + \frac{4}{F} \sin\left(\frac{Ft}{2}\right) \sin\left(P + \frac{Ft}{2}\right)$.

S'il est couplé à 1 système à 2 niveaux:

- $P(t) = \mathrm{e}^{itH} P \mathrm{e}^{-itH} = P + Ft$,
- $X(t) = X + \frac{4}{F} \sin\left(\frac{Ft}{2}\right) \sin\left(P + \frac{Ft}{2}\right) + A \sin(\omega t) + B \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$, où $\omega^2 = (E - F)^2 + 4\lambda^2$.

Si $\omega\tau \in 2\pi\mathbb{N}$, il y a un phénomène de résonance.

Electron + 1 système à 2 niveaux

Si l'électron est seul:

- $P(t) = \mathrm{e}^{itH_S} P \mathrm{e}^{-itH_S} = P + Ft$,
- $X(t) = X + \frac{4}{F} \sin\left(\frac{Ft}{2}\right) \sin\left(P + \frac{Ft}{2}\right)$.

S'il est couplé à 1 système à 2 niveaux:

- $P(t) = \mathrm{e}^{itH} P \mathrm{e}^{-itH} = P + Ft$,
- $X(t) = X + \frac{4}{F} \sin\left(\frac{Ft}{2}\right) \sin\left(P + \frac{Ft}{2}\right) + A \sin(\omega t) + B \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$, où $\omega^2 = (E - F)^2 + 4\lambda^2$.

Si $\omega\tau \in 2\pi\mathbb{N}$, il y a un phénomène de résonance.
On supposera que $\omega\tau \notin 2\pi\mathbb{N}$.

Forme explicite de $\mathcal{L}$

On calcule explicitement $\mathcal{L}(\rho) = \mathrm{e}^{-i\tau H_S}\tilde{\mathcal{L}}(\rho)\mathrm{e}^{i\tau H_S} = \tilde{\mathcal{L}}\left(\mathrm{e}^{-i\tau H_S}\rho\,\mathrm{e}^{i\tau H_S}\right)$, où

$$\tilde{\mathcal{L}}(\rho) = p_- T^{-1}\rho T + p_0\,\rho + p_+ T\rho T^{-1},$$

avec $p_- = \frac{\mathrm{e}^{-\beta E}}{1+\mathrm{e}^{-\beta E}}p$, $p_0 = 1-p$, $p_+ = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\beta E}}p$ et

$$p = \frac{4\lambda^2}{\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (\neq 0, \text{ non résonance}).$$

Forme explicite de $\mathcal{L}$

On calcule explicitement $\mathcal{L}(\rho) = \mathrm{e}^{-i\tau H_S}\tilde{\mathcal{L}}(\rho)\mathrm{e}^{i\tau H_S} = \tilde{\mathcal{L}}\left(\mathrm{e}^{-i\tau H_S}\,\rho\,\mathrm{e}^{i\tau H_S}\right)$, où

$$\tilde{\mathcal{L}}(\rho) = p_-\,T^{-1}\rho T + p_0\,\rho + p_+\,T\,\rho\,T^{-1},$$

avec $p_- = \frac{\mathrm{e}^{-\beta E}}{1+\mathrm{e}^{-\beta E}}p$, $p_0 = 1-p$, $p_+ = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\beta E}}p$ et

$$p = \frac{4\lambda^2}{\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \qquad (\neq 0,\ \text{non résonance}).$$

Comprendre $\tilde{\mathcal{L}}$: si $\rho = |k\rangle\langle k|$,

$$\tilde{\mathcal{L}}(|k\rangle\langle k|) = p_-|k-1\rangle\langle k-1| + p_0|k\rangle\langle k| + p_+|k+1\rangle\langle k+1|.$$

Forme explicite de $\mathcal{L}$

On calcule explicitement $\mathcal{L}(\rho) = \mathrm{e}^{-i\tau H_S}\tilde{\mathcal{L}}(\rho)\mathrm{e}^{i\tau H_S} = \tilde{\mathcal{L}}\left(\mathrm{e}^{-i\tau H_S}\rho\,\mathrm{e}^{i\tau H_S}\right)$, où

$$\tilde{\mathcal{L}}(\rho) = p_-\,T^{-1}\rho T + p_0\,\rho + p_+\,T\rho T^{-1},$$

avec $p_- = \frac{\mathrm{e}^{-\beta E}}{1+\mathrm{e}^{-\beta E}}p$, $p_0 = 1-p$, $p_+ = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\beta E}}p$ et

$$p = \frac{4\lambda^2}{\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \qquad (\neq 0,\ \text{non résonance}).$$

Comprendre $\tilde{\mathcal{L}}$: si $\rho = |k\rangle\langle k|$,

$$\tilde{\mathcal{L}}(|k\rangle\langle k|) = p_-|k-1\rangle\langle k-1| + p_0|k\rangle\langle k| + p_+|k+1\rangle\langle k+1|.$$

Conclusion: la dynamique de $\mathcal{L}$ correspond à

Dynamique libre de $\mathcal{S}$ $+$ marche aléatoire

Soient Y_j des v.a. i.i.d. prenant les valeurs -1, 0 et 1 avec probabilités respectives p_-, p_0 et p_+, et $S_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$.

On a alors $\mathcal{L}^n(\rho) = \mathrm{e}^{-in\tau H_S}\mathbb{E}(T^{S_n}\rho T^{-S_n})\mathrm{e}^{in\tau H_S}$.

Soient Y_j des v.a. i.i.d. prenant les valeurs -1, 0 et 1 avec probabilités respectives p_-, p_0 et p_+, et $S_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$.

On a alors $\mathcal{L}^n(\rho) = \mathrm{e}^{-in\tau H_S}\mathbb{E}(T^{S_n}\rho T^{-S_n})\mathrm{e}^{in\tau H_S}$.

Corollaire: en utilisant $T^{-1}XT = X + 1$, pour toute fonction f on a

$$\mathrm{Tr}(f(X)\rho_n) = \mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left(f\left(X + S_n + \frac{4}{F}\sin\left(\frac{Ft}{2}\right)\sin\left(P + \frac{Ft}{2}\right)\right)\rho\right)\right].$$

Soient Y_j des v.a. i.i.d. prenant les valeurs -1, 0 et 1 avec probabilités respectives p_-, p_0 et p_+, et $S_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$.

On a alors $\mathcal{L}^n(\rho) = \mathrm{e}^{-in\tau H_S}\mathbb{E}(T^{S_n}\rho T^{-S_n})\mathrm{e}^{in\tau H_S}$.

Corollaire: en utilisant $T^{-1}XT = X + 1$, pour toute fonction f on a

$$\mathrm{Tr}(f(X)\rho_n) = \mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left(f\left(X + S_n + \frac{4}{F}\sin\left(\frac{Ft}{2}\right)\sin\left(P + \frac{Ft}{2}\right)\right)\rho\right)\right].$$

Drift:

$$v(F) := \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Tr}(X\rho_n)}{n\tau} = \frac{p}{\tau}\tanh\left(\frac{\beta E}{2}\right).$$

Soient Y_j des v.a. i.i.d. prenant les valeurs -1, 0 et 1 avec probabilités respectives p_-, p_0 et p_+, et $S_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$.

On a alors $\mathcal{L}^n(\rho) = \mathrm{e}^{-in\tau H_S}\mathbb{E}(T^{S_n}\rho T^{-S_n})\mathrm{e}^{in\tau H_S}$.

Corollaire: en utilisant $T^{-1}XT = X + 1$, pour toute fonction f on a

$$\mathrm{Tr}(f(X)\rho_n) = \mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left(f\left(X + S_n + \frac{4}{F}\sin\left(\frac{Ft}{2}\right)\sin\left(P + \frac{Ft}{2}\right)\right)\rho\right)\right].$$

Drift:

$$v(F) := \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Tr}(X\rho_n)}{n\tau} = \frac{p}{\tau}\tanh\left(\frac{\beta E}{2}\right).$$

Diffusion:

$$2D(F) := \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Tr}((X - v(F)n\tau)^2\rho_n)}{\sqrt{n\tau}} = \frac{p}{\tau}\left(1 - p\tanh^2\left(\frac{\beta E}{2}\right)\right).$$

Detailed balance et relation d'Einstein

Detailed balance:

$$\mathbb{P}(|\psi_k\rangle \to |\psi_{k+1}\rangle)\mathrm{e}^{-\beta\epsilon(|\psi_k\rangle)} = \mathbb{P}(|\psi_{k+1}\rangle \to |\psi_k\rangle)\mathrm{e}^{-\beta\epsilon(|\psi_{k+1}\rangle)}$$

$$\iff \qquad p_+\mathrm{e}^{-\beta(2-Fk)} = p_-\mathrm{e}^{-\beta(2-F(k+1))}$$

$$\iff \qquad E = F$$

Detailed balance et relation d'Einstein

Detailed balance:

$$\mathbb{P}(|\psi_k\rangle \to |\psi_{k+1}\rangle)\mathrm{e}^{-\beta\epsilon(|\psi_k\rangle)} = \mathbb{P}(|\psi_{k+1}\rangle \to |\psi_k\rangle)\mathrm{e}^{-\beta\epsilon(|\psi_{k+1}\rangle)}$$

$$\iff \quad p_+\mathrm{e}^{-\beta(2-Fk)} = p_-\mathrm{e}^{-\beta(2-F(k+1))}$$

$$\iff \quad E = F$$

Dans ce cas, on a

$$v(F) = \frac{1}{\tau}\sin^2(\lambda\tau)\tanh\left(\frac{\beta F}{2}\right), \; D(F) = \frac{\sin^2(\lambda\tau)}{2\tau}\left(1 - \sin^2(\lambda\tau)\tanh^2\left(\frac{\beta F}{2}\right)\right)$$

Detailed balance et relation d'Einstein

Detailed balance:

$$\mathbb{P}(|\psi_k\rangle \to |\psi_{k+1}\rangle)\mathrm{e}^{-\beta\epsilon(|\psi_k\rangle)} = \mathbb{P}(|\psi_{k+1}\rangle \to |\psi_k\rangle)\mathrm{e}^{-\beta\epsilon(|\psi_{k+1}\rangle)}$$

$$\iff \qquad p_+\mathrm{e}^{-\beta(2-Fk)} = p_-\mathrm{e}^{-\beta(2-F(k+1))}$$

$$\iff \qquad E = F$$

Dans ce cas, on a

$$v(F) = \frac{1}{\tau}\sin^2(\lambda\tau)\tanh\left(\frac{\beta F}{2}\right), \; D(F) = \frac{\sin^2(\lambda\tau)}{2\tau}\left(1-\sin^2(\lambda\tau)\tanh^2\left(\frac{\beta F}{2}\right)\right)$$

Mobilité: $\mu := \lim_{F\to 0}\frac{v(F)}{F} = \frac{\beta\sin^2(\lambda\tau)}{2\tau}$.

Detailed balance et relation d'Einstein

Detailed balance:

$$\mathbb{P}(|\psi_k\rangle \to |\psi_{k+1}\rangle)\mathrm{e}^{-\beta\epsilon(|\psi_k\rangle)} = \mathbb{P}(|\psi_{k+1}\rangle \to |\psi_k\rangle)\mathrm{e}^{-\beta\epsilon(|\psi_{k+1}\rangle)}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad p_+\mathrm{e}^{-\beta(2-Fk)} = p_-\mathrm{e}^{-\beta(2-F(k+1))}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad E = F$$

Dans ce cas, on a

$$v(F) = \frac{1}{\tau}\sin^2(\lambda\tau)\tanh\left(\frac{\beta F}{2}\right), \; D(F) = \frac{\sin^2(\lambda\tau)}{2\tau}\left(1-\sin^2(\lambda\tau)\tanh^2\left(\frac{\beta F}{2}\right)\right)$$

Mobilité: $\mu := \lim_{F\to 0}\frac{v(F)}{F} = \frac{\beta\sin^2(\lambda\tau)}{2\tau}$.

Relation d'Einstein: $\lim_{F\to 0} D(F) = \mu\beta^{-1} = \mu k_B T$.