M2 Mathématiques Enseignement
TD d'analyse2 2010/2011

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

# Approximation de fonctions

**Exercice 1.** (Approximation polynomiale) Soit $\sigma_n = \{a_0, \dots, a_n\}$ une subdivision de $[a,b]$. On suppose que $f \in C^{n+1}(\mathbb{R})$. On pose $\Pi(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - a_i)$ et on définit des formes linéaires $\varphi_i$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall i,\ 0 \le i \le n,\ \varphi_i(P) = P(a_i).$$

**a)** Déterminer des polynômes $P_0, \dots, P_n$ de degrés inférieurs ou égaux à $n$ tels que $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$.
**b)** En déduire que $(P_0, \dots, P_n)$ et $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ sont des bases duales de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]^*$.
**c)** Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i,\ 0 \le i \le n,\ P(a_i) = f(a_i)$. P est le polynôme de Lagrange de $f$ associé à la subdivision $\sigma_n$. Quelles sont les coordonnées de $P$ dans la base $(P_0, \dots, P_n)$ ?

Soit $x \in [a,b]$ fixé. On pose $R(x) = f(x) - P(x)$

**d)** Que vaut $R(x)$ si $x \in \sigma_n$ ?

On suppose par la suite que $x \in [a,b] \setminus \sigma_n$. Soit $A \in \mathbb{R}$ tel que $R(x) = A\Pi(x)$. On définit alors

$$F(t) = R(t) - A\Pi(t), t \in \mathbb{R}.$$

**e)** Montrer que $F$ s'annule $(n+2)$-fois.
**f)** Démontrer l'existence de $\xi \in [\min\{a,x\}, \max\{b,x\}]$ tel que $F^{(n+1)}(\xi) = 0$.
**g)** Montrer que $R(x) = \dfrac{\Pi(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$.
**h)** En déduire que

$$\forall x \in [a,b],\ |f(x) - P(x)| \le \frac{|\Pi(x)|}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty.$$

**i)** On suppose que $a_i = i + \frac{b-a}{n}$. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, $|\Pi(x)| \le \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} n!$. Comparer avec le polynôme de Taylor d'ordre $n$. Quelle est la meilleure approximation ?

**Exercice 2.** (Théorème de Weierstrass, Polynômes de Bernstein) Soit $E$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$. On définit pour toute fonction $f \in E$ le polynôme suivant :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebytcheff, $P(|X - E(X)| \ge \delta) \le \dfrac{V(X)}{\delta^2}$.
**a)** Montrer qu'il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.q.

$$0 \le x, y \le 1 \text{ et } |x - y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon.$$

**b)** Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}<\varepsilon+\frac{2\|f\|_\infty x(1-x)}{n\delta^2}$$

**c)** En déduire que $f$ est limite uniforme sur $[0,1]$ de la suite de polynômes $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

**Exercice 3.** (Approximation par des fonctions affines ou étagées) Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $0\leq k\leq n$, on pose : $x_k=a+\dfrac{k}{n}(b-a)$.

**a)** On définit $f_n$ la fonction affine par morceaux, affine sur $[x_k,x_{k+1}]$ telle que $\forall k,\ f_n(x_k)=f(x_k)$. En utilisant l'uniforme continuité de $f$, montrer que la suite $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $[a,b]$.

**b)** On définit $s_n$ fonction étagèes, constantes sur $[x_k,x_{k+1}[$, $0\leq k<N$ et avec $s_n(x_k)=f(y_k)$, $0\leq k\leq N$, $y_k\in[x_k,x_{k+1}[$. Montrer que la suite $(s_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $[a,b]$.

**c)** A quoi sert l'approximation par des fonctions étagèes ?

**Exercice 4.** (Approximation $L^2$) Soit $E=C^0([-\pi,\pi])$.

**a)** Montrer que $\varphi:(f,g)\mapsto\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $E$. On note $\|\cdot\|_2$ la norme correspondante.

**b)** Vérifier que les fonctions $(\cos(kt))_{k\in\mathbb{N}}$, $(\sin(kt))_{k\in\mathbb{N}^*}$ forment un système orthogonal.

**c)** On appelle polynôme trigonométrique d'ordre au plus $n$, toute fonction $f$ de la forme $P(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k\cos(kt)+b_k\sin(kt)$ où les $a_k,b_k$ sont des nombres réels. Déterminer le polynôme trigonométrique d'ordre au plus $n$ qui approche le mieux la fonction $f(t)=|t|$ au sens des moindre carrés, i.e. tel que $\|f(t)-P(t)\|_2$ soit minimum. (Indication : penser à l'exercice 10 de la feuille sur les evn.)