CAPES de Mathématiques
TD de probabilités 2009/2010

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

1. Expérience aléatoire. Espace probabilisé. Dénombrement. Probabilités conditionnelles.

Exercice 1. On jette un dé équilibré deux fois de suite.

a) Ecrire l'espace probabilisé associé à cette expérience.

b) On suppose qu'on a colorié la face 1 en blanc et les autres faces en noir. Calculer les probabilités des évènements : BN= $\{$ la première face obtenue est blanche et la deuxième est noire $\}$, respectivement BB, NB, NN.

c) On efface les numéros sur le dé en ne gardant que les couleurs. On le jette deux fois de suite. Ecrire l'espace probabilisé associé à cette expérience.

Exercice 2. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 comme somme des chiffres fournis par le jet de deux dés ? On répondra en utilisant chacune des deux modélisations suivantes :

a) $\Omega = \{\{a, b\}/1 \leq a, b \leq 6\}$.

b) $\Omega = \{(a, b)/1 \leq a, b \leq 6\}$.

Exercice 3. On jette un dé équilibré trois fois. Calculer les probabilités des évènements suivants :

a) A : obtenir 3 chiffres différents,

b) B : obtenir exactement deux chiffres identiques.

Exercice 4. Une main de poker est constituée de 5 cartes, prises dans un jeu de 32 cartes.

a) Décrire l'expérience de 2 façons différentes, selon qu'on l'on tient compte ou non de l'ordre des cartes.

En utilisant les 2 descriptions, calculer les probabilités des configurations suivantes :

b) Une paire,

c) Deux paires,

d) Un brelan (trois cartes de même hauteur),

e) Un full (un brelan et une paire),

f) Un carré.

Exercice 5. *Applications du binôme de Newton*

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Interpréter ce résultat.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

c) En utilisant a) et b) montrer $\displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$.

d) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$. Indication : dériver de 2 façons différentes $(1+x)^n$ et évaluer la dérivée en un point bien choisi.

e) Soient $n, m \in \mathbb{N}^2$ et $0 \leq p \leq n+m$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$ (Formule de Vandermonde). Indication : calculer de deux façons différentes le coefficient de x^p dans $(1+x)^n(1+x)^m$.

f) *Petit Théorème de Fermat*. Soit p un nombre premier.

i) Montrer que pour tout $1 \leq k \leq p-1$ p divise $\binom{p}{k}$ (indication : penser à la formule $k\binom{p}{k} = \cdots$).

ii) Montrer par récurrence que, pour tout $a \in \mathbb{N}$, $a^p \equiv a\ [p]$.

Remarque. Cette application peut se placer dans la leçon sur les coefficients binomiaux (leçon 3) et en application du Théorème de Gauss (leçons 11 et 12).

Exercice 6. *Quelques problèmes de dénombrement.*

a) En comptant de deux façons différentes le nombre de chemins “croissants” (i.e. on ne peut se déplacer que vers la droite ou vers le haut) allant du point $(0,0)$ au point (n,n) sur un quadrillage, montrer la relation :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

b) Combien y a-t-il de nombres de 5 chiffres écrits en base 10 où 0 figure une fois et une seule ? Même question en base 3 ?

c) Soient p et q des entiers strictement positifs. Quel est le nombre de partitions $S(p,q)$, d'un ensemble à pq éléments en p classes de q éléments (on ne distingue pas l'ordre des classes).

d) Quel est le nombre de p-cycle dans le groupe symétrique S_n.

e) Soient n et p des entiers naturels non nuls. Combien y a-t-il d'éléments de $\{a,b\}^{n+p-1}$ contenant exactement n fois le symbole a. En déduire le nombre de p-uplets $(n_1, \ldots, n_p)$ d'entiers naturels dont la somme vaut n.

Exercice 7. Rappeler la formule du crible pour la réunion de 2 ensembles, de trois ensembles, de n ensembles. Soit E un ensemble à n éléments et F un ensemble à p éléments. Pour $a \in F$ on note A_a l'ensemble des applications f de E dans F telles que $a \notin \mathrm{Im} f$. Quelle relation y a-t-il entre les surjections de E dans F et les A_a ? Montrer que le nombre de surjections de E dans F est :

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

Exercice 8. (CAPES 2003, extrait de la 2ème épreuve)

a) Dans un espace probabilisé, montrer que si deux évènements sont indépendants alors il en est de même de leurs complémentaires. Généraliser à plusieurs évènements.

On désigne par S_n l'ensemble des entiers strictement positifs, inférieurs ou égaux à n et premiers avec n. On notera $\phi(n)$ le cardinal de S_n.

On considère une v.a. X à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$ de loi uniforme.

b) Soient les évènements A_1 : “X est multiple de 2” et A_2 :“X est multiple de 5”.

$i)$ On suppose $n = 100$. Calculer les probabilités des évènements A_1 et A_2. Ces deux évènements sont-ils indépendants ?

$ii)$ On suppose $n = 101$. Reprendre les questions du a) dans ce cas.

c) On suppose que la décomposition en facteurs premiers de n s'écrit $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, où les α_i sont des entiers supérieurs ou égaux à 1. Pour $i = 1, 2, \ldots, k,\ A_i$ désigne l'évènement "X est divisble par p_i".

$i)$ Soit A l'évènement "X est premier avec n". Exprimer $P(A)$ en fonction de n et de $\phi(n)$.

$ii)$ Montrer que $P(A_i) = \frac{1}{p_i}$.

$iii)$ Montrer que les A_i sont indépendants.

$iv)$ Exprimer A à l'aide des $\bar{A}_i$, les complémentaires des A_i.

$v)$ En déduire que $\phi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

Exercice 9. On lance un dé rouge et un dé noir, tous deux équilibrés. Calculer les probabilités que l'on obtienne :

a) un 2 avec le dé rouge sachant que la somme des points est 6.

b) un nombre pair avec le dé rouge sachant que la somme des points est 6.

c) un nombre pair avec le dé rouge sachant que la somme des points est au plus 6.

d) au moins un nombre pair sachant que la somme des points est au plus 10.

Exercice 10. On jette 2 fois un même dé. Soient A, B et C les évènements suivants :

a) $A =$\{la sommes des points obtenus vaut 6\}, $B =$\{On obtient 4 au premier jet\}, $C =$\{la sommes des points vaut 7\}.

b) $A =$\{le 1er jet est impair\}, $B =$\{le 2ème jet est impair\}, $C =$\{la somme des points est impaire\}.

Dans chacun des cas a) et b) dire si les évènements A, B et C sont indépendants 2 à 2, puis s'ils sont mutuellement indépendants.

Exercice 11. Sur une population P, les groupes sanguins se répartissent de la façon suivante :

A	B	AB	O
40%	10%	5%	45%

Pour chaque groupe, la proportion d'individus possédant ou non le facteur rhésus se répartit d'après le tableau suivant :

	A	B	AB	O
Rh$^+$	82%	81%	83%	80%

Un individu ayant le groupe O et un rhésus négatif est appelé *donneur universel*.

a) A quelles probabilités correspondent les valeurs des 2 tableaux ?

b) Représenter les informations données dans ces tableaux à l'aide d'un arbre.

c) Quelle est la probabilité qu'un individu pris au hasard dans la population P soit donneur universel ? Qu'il soit de rhésus négatif ?

d) Quelle est la probabilité qu'un individu pris au hasard parmi ceux de rhésus négatif soit du groupe O ?

Exercice 12. On dispose d'un alcootest fiable à 98%, c'est-à-dire que 98% des personnes ayant bu de l'alcool ont un test positif et que 98% des personnes n'ayant pas bu d'alcool ont un test négatif. On sait qu'à un moment donné 2% des automobilistes ont bu de l'alcool.

a) Calculer la probabilité qu'un alcootest effectué sur un automobiliste pris au hasard soit positif.

b) Donner la probabilité que l'automobiliste ait bu de l'alcool sachant que le test est positif.

c) Donner la probabilité que l'automobiliste n'ait rien bu sachant que le test est négatif.

Exercice 13. Les ampoules produites par une entreprise proviennent de 3 usines : A (30% de la production), B (25% de la production) et C (45% de la production). 5% des ampoules fabriquées par l'usine A sont défectueuses, ainsi que 8% de celles fabriquées par l'usine B et 3% de celles fabriquées par l'usine C.

a) Quelle est la probabilité qu'une ampoule choisie au hasard parmi celles produites par cette entreprise soit défectueuse ?

b) Sachant qu'une ampoule fonctionne correctement, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'usine A ?

c) Les ampoules sont vendues par boites de 2 (les 2 ampoules d'une boite donnée proviennent de la même usine). Un client achète une boite. Quelle est la probabilité que les deux ampoules de la boite soient défectueuses ?

d) Un client achète une boite dans laquelle exactement une des 2 ampoules est défectueuse. De quelle usine est-il plus probable qu'elle provienne ?

Exercice 14. Une puce se déplace entre 3 points A, B et C. Au départ elle est en A. A chaque étape, elle quitte sa position et gagne indifféremment l'un des deux autres points, i.e. si elle est en A elle a une chance sur 2 d'aller en B et une chance sur 2 d'aller en C. On note α_n, β_n et γ_n les probabilités qu'elle se trouve respectivement en A, B et C à l'issue de la n-ème étape (on a donc $\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = \gamma_0 = 0$).

a) Calculer $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ et $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$.

b) Exprimer $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \gamma_{n+1}$ en fonction de $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.
On veut étudier le comportement des suites $(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n$ et $(\gamma_n)_n$ lorsque n tend vers $+\infty$. On propose 2 méthodes.

c) Méthode 1 : *diagonalisation d'une matrice.* Soit $(X_n)_n = {}^t(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$.

i) Déterminer une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $X_{n+1} = AX_n$.

ii) Diagonaliser A.

iii) Exprimer A^n en fonction de n.

iv) En déduire une expression de α_n, β_n et γ_n en fonction de n.

d) Méthode 2 : *suites arithmético-géométriques.*

i) Que vaut $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n$? En déduire α_{n+1} en fonction de α_n.

ii) Soient $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $b \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par récurrence par $u_{n+1} = au_n + b$. Montrer que la suite $v_n = u_n + \frac{b}{a-1}$ est une suite géométrique. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

iii) Exprimer α_n en fonction de n.

iv) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\beta_n = \gamma_n$. En déduire β_n et γ_n en fonction de n.

e) Quelles sont les limites de α_n, β_n et γ_n lorsque n tend vers $+\infty$?

2. Variables aléatoires et couples de variables aléatoires discrètes

Exercice 1. *(Variables aléatoires de Bernoulli et Binomiale).*
Dans une pépinière, 95% des greffons sont supposés sans virus. Les greffons sont rangés par paquets de 2. Un paquet est déclaré sain si les 2 greffons sont sans virus.

a) Déterminer la probabilité pour qu'un paquet soit sain.

b) Les greffons sont vendus par lots de 10 paquets. On modélise le nombre de paquets sains dans un lot à l'aide d'une variable aléatoire X. Déterminer la loi de X.

c) Un lot de 10 paquets (20 greffons) est accepté par le client si au moins 9 des 10 paquets sont déclarés sains. Quelle est la probabilité pour qu'un lot soit accepté ?

d) Le pépiniériste décide plutôt de regrouper les greffons par paquets de 4, et de vendre des lots de 5 paquets (donc toujours 20 greffons). Un paquet est déclaré sain si tous les greffons du paquet sont sans virus, et un lot est accepté si au moins 4 des 5 paquets sont sains. Le choix du pépiniériste est-il justifié ?

Exercice 2. *(Variable aléatoire géométrique).*

a) On lance un dé, et on veut étudier l'instant (aléatoire) où le 6 apparaît pour la première fois. Modéliser cette expérience à l'aide d'une variable aléatoire X. Calculer sa fonction de répartition, son espérance et sa variance.

b) On lance un dé à 6 faces et un autre dé à 20 faces. Introduire une v.a. modélisant l'arrivée du premier 6. Calculer sa fonction de répartition, et déterminer sa loi.

c) Si X et Y sont des variables aléatoires géométriques indépendantes, quelle est la loi de $\min(X, Y)$?

Exercice 3. *(Variable aléatoire hypergéométrique).*
On considère une population S (des boules par exemple) dont les individus sont répartis en deux types S_1 (boules noires) et S_2 (boules blanches), de tailles respectives n_1 et n_2.

On tire au hasard (sans remise) une sous-population de S, de taille r.

a) Décrire l'espace probabilisé associé à ce tirage.

b) Soit X le nombre d'éléments de type S_1 tirés. Calculer la loi de X (Vocabulaire : cette loi s'appelle "la loi hypergéométrique de paramètres (n_1, n_2, r)").

c) Calculer son espérance.

Exercice 4. *Application de la variable hypergéométrique à l'écologie.*
On souhaite estimer le nombre d'individus N dans une population animale. On procède de la façon suivante :

(1) On prélève un nombre N_1 d'individus dans cette population, et on les marque.

(2) On les relache et on attend suffisament pour que ceux-ci se dispersent parmi la population.

(3) On effectue un nouveau prélèvement de n individus, et on compte parmi ces n individus combien sont marqués.

a) Modéliser le nombre d'individus marqués lors du second prélèvement à l'aide d'une variable aléatoire X_N (ici le nombre N total d'individus est inconnu et on souhaite en donner une estimation).

b) On a dénombré k individus marqués lors du second prélèvement. On estime N comme étant la valeur pour laquelle $P(X_N = k)$ est maximale. Donner une estimation de N en fonction de N_1, n et k.

Exercice 5. *(Variable aléatoire de Poisson).*
Soit X une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, i.e. $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et, $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.

a) Retrouver l'espérance et la variance de X.
Dans un ouvrage de 1000 pages, on a dénombré 50 coquilles. On estime que le nombre de coquilles par page de cet ouvrage est décrit par une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

b) Donner le nombre moyen de coquilles par page. Quelle valeur de λ faut-il alors choisir ?

c) On choisit une page au hasard dans l'ouvrage. Quelle est la probabilité que cette page ne contienne aucune erreur ? exactement une erreur ? strictement plus d'une erreur ?

Exercice 6. Montrer que la somme de deux variables aléatoires binomiales indépendantes est une variable aléatoire binomiale. De même, montrer que la somme de deux variables aléatoires de Poisson indépendantes est une variable aléatoire de Poisson.

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n = P(X = n)$.

a) Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si et seulement si pour tout $n \geq 0$, $\quad \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\lambda}{n+1}$.

b) Quelle est la valeur la plus probable d'une variable distribuée selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$?

Exercice 8. Dans une grande urne se trouvent toutes les permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. On en tire une, σ, au hasard et on modélise le nombre de points invariants de σ à l'aide d'une variable aléatoire X. On note U_i la variable aléatoire valant 1 sur l'ensemble $\{\tau \in S_n \,|\, \tau(i) = i\}$ et 0 ailleurs.

a) Déterminer une relation entre X et les U_i.

b) Déterminer l'espérance de U_i puis celle de X.

c) Déterminer l'espérance de U_iU_j pour $i \neq j$ et de U_i^2.

d) Déterminer la variance de U_i et de X.

Exercice 9. Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire dont la loi est donnée par :

– $(X, Y)(\Omega) = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \,|\, m \leq n\}$,

– $\forall m, n \in \mathbb{N},\ m \leq n,\ P\big((X, Y) = (m, n)\big) = \dfrac{\dbinom{n}{m}\mathrm{e}^{-2\lambda}\lambda^n}{n!}$, où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Déterminer les lois marginales de X et Y.

b) X et Y sont-elles indépendantes ?

c) Calculer la covariance de X et Y.

d) Pour n fixé, déterminer la loi de X conditionnée par $Y = n$.

e) Y représente le nombre de personnes qui arrivent à un guichet durant une période de 1 minute, et X représente le nombre de femmes qui arrivent à ce guichet pendant la même période. Comment interpréter le résultat d) ?

Exercice 10. A l'entrainement, un basketteur met le ballon dans le panier avec une probabilité p.

a) Soit N le nombre minimal de lancers que le basketteur doit faire pour voir passer le ballon dans le panier. Par exemple, si le ballon est dans le panier au premier coup, $N = 1$. Donner la loi de N. Donner son espérance et sa variance.

b) Soit n un entier naturel. Maintenant le basketteur compte le nombre minimal de lancers nécessaires, X, pour mettre n paniers. Donner, pour tout entier $k > 0$, $P(X = k)$.

c) Expliquer pourquoi X peut être vu comme une somme de n variables indépendantes et identiquement distribuées dont on donnera la loi.

d) En déduire l'espérance et la variance de X. (On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} = \frac{2-p}{p^2}$.)

Exercice 11. Sur l'ile du Crozet, il passe au plus un bateau par mois. Tous les mois ont la même probabilité p qu'un bateau passe, et on suppose que la venue de chaque bateau est indépendante de ce qui s'est passé les autres mois. Arrivé par bateau sur l'ile au mois 0, soit M le nombre de mois qu'il faudra attendre avant l'arrivée du prochain bateau.

a) Donner la loi de M.

b) Chaque bateau a une probabilité c de contenir des cigarettes et cela indépendamment de tout le reste (arrivée du bateau, mois précédents). Soit M_c le nombre de mois qu'il faudra attendre avant le ravitaillement en cigarettes. Quelle est la loi de M_c ?

c) Donner la loi de N_c le nombre de cargaisons de cigarettes reçues entre les mois 1 et m.

d) Il se peut aussi qu'il y ait de l'alcool dans la cargaison avec probabilité μ et cela de manière totalement indépendante du reste (entre autres la présence ou non de cigarettes). Soit M_a le nombre de mois qu'il faudra attendre avant le ravitaillement en alcool. Quelle est la probabilité pour que $M_c = M_a$?

Exercice 12. On s'intéresse à la transmission d'une information binaire, c'est à dire ne pouvant prendre que deux valeurs. On admet que le procédé de transmission directe entre deux individus A et B est tel que, lorsque A émet une valeur de l'information à destination de B, ce dernier reçoit la valeur émise par A avec la probabilité p, et donc l'autre valeur avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que $0 < p < 1$.

On considère des individus successifs $i_0, i_1, ..., i_n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. L'information émise par i_0 est transmise à i_1, qui transmet la valeur reçue à i_2, et ainsi de suite jusqu'à i_n. Entre deux individus, i_k et i_{k+1}, la transmission de l'information suit la loi décrite plus haut. On note p_k la probabilité que la valeur de l'information reçue par i_k soit identique à celle émise par i_0, et on pose $p_0 = 1$.

a) Exprimer p_{k+1} en fonction de p_k.

b) Déterminer une expression de p_n en fonction de n et de p.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

Exercice 13. On suppose que N, le nombre d'oeufs pondus par une tortue, suit une loi de Poisson de paramètre λ.

a) Donner l'espérance et la variance de N.

b) Chaque oeuf de la ponte a une probabilité p d'éclore et cela indépendamment de ce qui se passe pour les autres oeufs. Quelle est la loi du nombre d'oeufs éclos, N_e, par ponte ?

c) Il y a une proportion f de femelles et m de mâles parmi les oeufs pondus ($f + m = 1$). Le sexe de l'oeuf est complètement indépendant du fait que l'oeuf éclose. Quelle est la loi de N_f, le nombre de femelles écloses, et celle de N_m, le nombre de mâles éclos ?

d) Montrer que N_f , le nombre de femelles écloses, et $N_{ne} = N - N_e$, le nombre d'oeufs non éclos, sont des variables indépendantes.

Exercice 14. On choisit au hasard N valeurs dans l'intervalle $[0, \rho^{-1}N]$, avec $\rho > 0$. Pour un intervalle $[a, b] \subset [0, \rho^{-1}N]$ on note $M_N([a, b])$ le nombre de valeurs qui appartiennent à l'intervalle $[a, b]$.

a) Donner la loi de la v.a. $M_N([a,b])$.
b) Trouver la loi limite de $M_N([a,b])$ lorsque $N \to +\infty$.
c) Soit t_N la valeur la plus proche de 0. Pour $t \geq 0$ fixé, calculer la probabilité que $t_N \geq t$, ainsi que la limite de cette probabilité quand $N \to +\infty$.
d) Si $[a,b]$ et $[c,d]$ sont deux intervalles disjoints dans $[0,+\infty[$, les variables $M_N([a,b])$ et $M_N([c,d])$ sont elles indépendantes ?
e) Montrer que lorsque $N \to +\infty$, ces deux variables deviennent indépendantes, i.e. pour tous $k, m \geq 0$,

$$\lim_{N\to+\infty} P\big(M_N([a,b]) = k, M_N([c,d]) = m\big) = \lim_{N\to+\infty} P\big(M_N([a,b]) = k\big) \times \lim_{N\to+\infty} P\big(M_N([c,d]) = m\big).$$

Peut-on expliquer ce résultat ?
f) Calculer la covariance et le coefficient de corrélation du couple $(M_N([a,b]), M_N([c,d]))$. Quelle est la limite du coefficient de corrélation lorsque $N \to +\infty$?

3. Variables aléatoires et couples de v.a. à densité

Exercice 1. Soit $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definie par $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\le 0, \\ 1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(1+\frac{x}{2}) & \text{si} \quad x>0. \end{cases}$ Montrer que F est la fonction de répartition d'une loi de probabilité dont on déterminera une densité si elle existe.

Exercice 2. Quelles sont les v.a. à densité classiques que vous connaissez ? Calculer leur espérance et leur variance.

Exercice 3. Soient X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer les fonctions de répartition des v.a. $U=\min\{X_1,X_2\}$ et $V=\max\{X_1,X_2\}$, et en déduire les densités de probabilité de U et V. Que vaut $E(|X_1-X_2|)$?

Exercice 4. Déterminer la loi du minimum de n v.a. indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs $\lambda_i,\ i=1,...,n$.

Exercice 5. Une photocopieuse tombe régulièrement en panne. On note X_1 une v.a. modélisant la durée en heures entre la mise en route de la photocopieuse et la première panne, X_2 une v.a. modélisant la durée entre la remise en route de la photocopieuse et la seconde panne, et ainsi de suite. On suppose que les variables aléatoires sont indépendantes et suivent la même loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

a) Quelle est la durée moyenne entre deux pannes consécutives ?

b) Calculer la probabilité que la photocopieuse fonctionne 3 fois de suite pendant plus de 2 heures.

c) Soit Y une variable aléatoire modélisant la durée maximale de fonctionnement continu, lors des trois premières périodes de fonctionnement. Calculer $P(Y\le t)$.

d) Déterminer la densité de Y.

e) Calculer l'espérance de Y.

Exercice 6. Soit (X,Y) un couple de v.a. suivant la loi uniforme sur le disque unité.

a) Déterminer les lois marginales de X et de Y ?

b) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires dont la densité est donnée par :

$$f(x,y)=\begin{cases} \alpha|xy| & \text{si} \qquad 0<y<1-|x|, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Déterminer α.

b) Calculer $P(Y-X<0)$.

c) Déterminer les lois marginales de X et Y.

d) Calculer $P(X>\frac{1}{2}|Y>\frac{1}{2})$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 8. Soit A le sous-ensemble du carré unité défini par

$$A=\{(x,y)\in[0,1]^2 : x\ge y+\frac{1}{2} \text{ ou } x\le y\le x+\frac{1}{2}\}.$$

a) Déterminer $\iint \mathbb{1}_A(x,y)dxdy$.

b) Soit (X,Y) un couple de v.a. de densité uniforme sur A. Déterminer les lois marginales de X et de Y.

c) Calculer la covariance du couple (X,Y) ainsi que son coefficient de corrélation.

Exercice 9. Soit L une v.a.r. positive admettant une densité de probabilité f et X une v.a.r. de loi uniforme sur $[0,1]$ indépendante de L. On définit deux v.a.r. L_1 et L_2 par $L_1=XL$ et $L_2=(1-X)L$ (cela représente par exemple la rupture aléatoire en 2 morceaux de longueurs L_1 et L_2 d'une certaine molécule de longueur initiale (aléatoire) L).

a) Déterminer la loi du couple (L_1,L_2), ainsi que les lois marginales de L_1 et L_2.

b) Que peut-on dire du couple (L_1,L_2) lorsque $f(y)=\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y)\lambda^2 y\mathrm{e}^{-\lambda y}$ $(\lambda>0)$?

c) Déterminer la loi de $Z=min\{L_1,L_2\}$.

4. Convergence de suites de variables aléatoires

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire discrète ou à densité, d'espérance m et de variance σ^2. En étudiant $E((X-m)^2)$, montrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall t > 0, P(|X-m| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}.$$

Démontrer, dans ce cas, la loi faible des grands nombres.

Exercice 2. (*Convergence en loi de la loi hypergéométrique vers la loi binomiale.*)
Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires hypergéométriques de paramètres (M_k, N_k, n), telle que

$$\lim_{k\to+\infty} M_k = +\infty \text{ et } \lim_{k\to+\infty} \frac{M_k}{N_k + M_k} = p \in]0;1[.$$

Montrer que :

$$\lim_{k\to\infty} P(X_k = l) = \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l},$$

et interpréter ce résultat.

Exercice 3. (*Convergence en loi de la loi Binomiale vers la loi Poisson.*)
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires binomiales de paramètres $(n, \frac{\lambda}{n})$ où $\lambda > 0$.

a) Calculer, pour un k fixé, la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k)$.

b) Application : La proportion de maisons touchées par la foudre une année donnée est $0,001\%$. Quelle est la probabilité qu'une assurance assurant 100 000 maisons ait moins de 3 maisons touchées par la foudre. On précisera les hypothèses faites et on les critiquera.

Exercice 4. La suite S_n/n converge-t-elle en probabilité lorsque $n \to \infty$ si :

a) S_n suit la loi de Poisson du paramètre n,

b) S_n suit la loi binomiale $B(n,p)$,

c) S_n suit la loi normale $\mathcal{N}(0,n)$. (On admettra que la somme de deux variables aléatoires normales indépendantes $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ et $\mathcal{N}(m',\sigma'^2)$ suit une loi $\mathcal{N}(m+m',\sigma^2+\sigma'^2)$.)

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire binomiale de paramètres 40 et $0,5$. Calculer à 10^{-4} près la probabilité $P(17 \leq X < 24)$:

a) Directement à l'aide de la loi binomiale.

b) En utilisant le théorème limite central.

Exercice 6. Une entreprise fabrique des montres. À la sortie, $0,6\%$ sont défectueuses. On considère un lot de n montres et on note X_n le nombre de montres défectueuses.

a) Comment peut on modéliser X_n ? Quelles hypothèses fait-on alors ?

b) Pour $n = 500$, comment peut-on approximer X_n ? En déduire une valeur approchée de la probabilité d'avoir au plus deux montres défectueuses.

c) Pour $n = 10000$, comment peut-on approximer X_n ? En déduire une valeur approchée de la probabilité d'avoir strictement entre 50 et 70 montres défectueuses.

5. Statistiques : Estimation par intervalles de confiance, Tests

Exercice 1. On admet que la durée de vie, exprimée en jours, d'un composant électronique suit une loi normale d'écart type 70. Les durées de vie de 250 composants ont donné une moyenne de 450 jours. Donner un intervalle de confiance à 99% de la durée de vie moyenne d'un composant. On admettra que la somme de deux variables aléatoires normales indépendantes $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(m', \sigma'^2)$ suit une loi $\mathcal{N}(m + m', \sigma^2 + \sigma'^2)$.

Exercice 2. Un échantillon de 478 électeurs, choisis aléatoirement, indique que 255 d'entre eux vont voter pour A. Évaluer des intervalles de confiance à 1% et à 5% pour la proportion (inconnue) d'électeurs votant pour A.

Exercice 3. On effectue un contrôle de fabrication sur des pièces dont une proportion p est défectueuse. On contrôle un lot de 200 pièces et on trouve 20 pièces défectueuses. Donner des intervalles de confiance pour p, au niveau 95% puis 99%.

Exercice 4. Des appareils électriques de chauffage ont une moyenne de vie de fonctionnement de 20000 heures avec un écart type de 7000 heures. À l'aide d'un changement de composant, le fabricant affirme que la durée de vie moyenne peut être accrue et atteindre 21500 heures. On a testé un échantillon de 127 appareils et on a observé une durée de vie moyenne de 21100 heures. Peut-on soutenir cette affirmation au risque de 5%, 1% ? Calculer le risque de deuxième espèce.

Exercice 5. Une pièce jetée 660 fois tombe 312 fois sur pile. Pensez vous que cette pièce est bien équilibrée ?

Exercice 6. Le fabricant d'une nouvelle solution anti-rouille annonce que son produit est efficace à 90%. Dans un échantillon de 500 pièces le résultat est probant pour 420 d'entre elles. L'affirmation du fabricant est-elle légitime ?

Exercice 7. Deux machines A et B fabriquent en série la même pièce. Lors d'une expertise de la production, on remarque que la machine A a produit 2700 pièces dont 50 sont défectueuses alors que sur les 1600 pièces produites par la machine B, 35 sont défectueuses. Doit-on conclure que la machine A est mieux réglée que la B ?