M2 Mathématiques Enseignement
TD d'analyse2 2010/2011

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1.

a) Rappeler les définitions de domination, prépondérance, équivalence de deux fonctions f et g au voisinage d'un point ou de l'infini.

b) Etudier la "stabilité" de ces relations par rapport aux opérations suivantes : somme, produit, passage à l'exponentielle, au logarithme, dérivation. Si ces relations sont préservées le prouver, sinon donner un contre-exemple.

Exercice 2.

a) Donner une démonstration du théorème : "Une fonction continue sur un segment atteint un maximum global et un minimum global".

b) Trouver une fonction f définie sur $[0, 1]$ qui n'est pas bornée.

c) Trouver une fonction f définie sur $[0, 1]$, bornée, mais qui n'admet ni minimum ni maximum global.

d) Trouver une fonction f définie sur $[0, 1]$, bornée, mais qui n'admet ni minimum ni maximum local. On pourra juste en représenter une graphiquement. (Indication : considérer une fonction en dents de scie dont les dents se rapprochent aux bords de l'intervalle.)

Exercice 3.

a) Rappeler la définition de notion de meilleure approximation affine d'une fonction f en un point x_0.

b) Montrer que f admet une meilleure approximation affine $P(x) = ax+b$ en x_0 ssi f est dérivable en x_0 et qu'alors $a = f'(x_0)$ et $b = f(x_0)$.

Exercice 4. Illustrer graphiquement chacun des théorèmes suivants. A chaque fois, on illustrera le théorème ainsi qu'un "contre-exemple" pour chacune des hypothèses manquantes. Par exemple, pour le théorème des valeurs intermédiaires, on fera un dessin illustrant le théorème, un contre-exemple lorsque la fonction n'est pas continue et un lorsqu'elle n'est pas définie sur un intervalle.

- Le théorème sur les suites adjacentes,
- Le théorème des valeurs intermédiaires,
- Le théorème de Rolle,
- Le théorème des accroissements finis.

Exercice 5. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Rappeler la démonstration de :

$$f \text{ est croissante sur } I \text{ si et seulement si } f'(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in I.$$

Indication : l'une des 2 implications découle directement de la définition de la dérivée, l'autre fait appel à un théorème important !

Exercice 6. Pour une fonction $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, on définit de façon identique les notions de limite, continuité, dérivabilité,... que pour une fonction réelle (essayez d'écrire les définitions correspondantes).

a) Trouver une fonction $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ continue mais ne vérifiant pas le théorème des valeurs intermédiaires. (Indication : $\sqrt{2}$ est irrationnel.)

b) Soit $f : [0,1]_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$, où $[0,1]_{\mathbb{Q}}$ désigne le segment rationnel $\{q \in \mathbb{Q},\ 0 \le q \le 1\}$, définie par

$$f(x) = x \quad \text{si} \quad x^2 < \frac{1}{2}, \qquad f(x) = x - 1 \quad \text{si} \quad x^2 > \frac{1}{2}.$$

Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée. Que remarque-t-on ?

Exercice 7. Soit P un polynôme à coefficients réels et scindé sur $\mathbb{R}$, i.e. $P(x) = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(x - a_i)^{m_i}$ avec $a_1 < \cdots < a_k$, $m_i \ge 1$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} m_i = n = \mathrm{d}^\circ P$. On veut montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ le polynôme $P' + \alpha P$ est scindé. On considère $g(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} P(x)$.

a) Quelles sont les “racines” de g ?

b) Montrer que $P' + \alpha P$ admet les a_i pour racines avec ordre de multiplicité $m_i - 1$.

c) En considérant la fonction g, montrer que $P' + \alpha P$ possède $k-1$ racines $b_1, \cdots, b_{k-1}$ distinctes des a_i dans l'intervalle $[a_1, a_k]$.

d) Conclure dans le cas $\alpha = 0$.

On supposera désormais que $\alpha \neq 0$.

e) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$, resp. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$, resp. $c \in]-\infty, a[$ tel que $f'(c) = 0$.

f) Montrer que $P' + \alpha P$ admet une racine $c < a_1$ si $\alpha > 0$ et $c > a_n$ si $\alpha < 0$.

g) Conclure. Quel est l'ordre de multiplicité des b_i et de c ?

Exercice 8. Soit f un fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I. Soit $b \in I$. On définit $F_b : I \to \mathbb{R}$ par

$$F_b(x) = f(b) - \left(\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) \frac{(b-x)^k}{k!} \right).$$

a) Montrer que F_b est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

b) En déduire la formule de Taylor avec reste intégral.

c) Soit $a \in I$ tel que $a \neq b$. Soit A le réel tel que $F_b(a) = \dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A$. Montrer qu'il existe c un réel compris entre a et b tel que $A = f^{(n+1)}(c)$.

d) Quelle formule obtient-on ainsi ?

Exercice 9. (Théorème de Darboux). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On veut montrer que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires même si f' n'est pas continue.

a) Soit $[a, b] \subset I$. On suppose que $f'_+(a) < 0$ et $f'_-(b) > 0$. Montrer que f possède un minimum local dans $]a, b[$. En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

b) Montrer que si $f'(a) < \lambda < f'(b)$ (ou $f'(b) < \lambda < f'(a)$) alors il existe $c \in]a, b[$ telle que $f'(c) = \lambda$.

c) En déduire que $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 10. Soit f une fonction convexe sur un **segment** I.

a) Montrer l'inégalité des pentes, i.e, pour tous $a < b < c$ réels de I,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

b) En déduire que f est continue sur $\overset{\circ}{I}$. Qu'en est-il aux bornes de I ?

c) Que peut-on dire de la dérivabilité éventuelle de f ?

d) Montrer que si f est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est convexe ssi f' est croissante.

e) Montrer que si f est dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est convexe ssi le graphe de f est au-dessus de ses tangentes, i.e.

$$\forall (x, x_0) \in I^2, \qquad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0).$$

f) Inégalité de Jensen : Soient $x_1, .., x_n \in I$ et $p_1, .., p_n \in [0, 1]$ avec $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, Alors,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\, x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} p_k\, f(x_k).$$

g) Application 1 : comparaison des moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques.

i) Vérifier que la fonction $\ln$ est concave.

ii) En déduire que pour tous $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}$$

h) Application 2 : polygônes réguliers.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et $M_1 M_2 \cdots M_n$ un polygône convexe inscrit dans un cercle (de centre O et de rayon $R > 0$.) On note θ_i l'angle $\widehat{M_i O M_{i+1}}$ pour $i = 1, \cdots, n-1$ et θ_n l'angle $\widehat{M_n O M_1}$.

i) Faire un dessin !

ii) Calculer $M_i M_{i+1}$ en fonction de θ_i puis le périmètre P_n du polygône.

iii) Montrer que $P_n \leq 2nR \sin \frac{\pi}{n}$ (Indication : montrer que la fonction $\sin$ est concave sur $[0, \pi]$).

iv) Quel est le polygône convexe à n côtés et inscrit dans un cercle qui a le périmètre maximal ?