M2 Mathématiques Enseignement
TD d'analyse2 2010/2011

Intégration

Exercice 1. (Calculs approchés)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On note $M_1 = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ et $M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. On définit

$$\begin{aligned}
S_n^g &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right), && \text{(point gauche)}\\
S_n^d &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right), && \text{(point droite)}\\
S_n^m &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right), && \text{(point milieu)}\\
T_n &= \frac{1}{2}(S_n^g + S_n^d). && \text{(trapèze)}
\end{aligned}$$

On utilise les quantités S_n^d, S_n^g, S_n^m et T_n pour calculer une valeur approchée de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

a) Justifier les noms de ces 4 méthodes de calcul approché.

b) $i)$ En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - S_n^g\right| \le \frac{M_1(b-a)^2}{2n}, \quad \text{et} \quad \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - S_n^d\right| \le \frac{M_1(b-a)^2}{2n}.$$

$ii)$ En considérant les fonctions $f(x) = x$, resp. $f(x) = -x$, montrer que les majorations ci-dessus sont optimales.

c) $i)$ En utilisant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, montrer que

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - S_n^m\right| \le \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}.$$

$ii)$ En considérant la fonction $f(x) = x^2$ sur $[0,1]$ montrer que la majoration obtenue est optimale.

d) Expliquer pourquoi la majoration obtenue est bien meilleure avec la méthode du point milieu.

e) On note $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$.

$i)$ On note $P_k(x)$ la fonction affine passant par les points $(x_k, f(x_k))$ et $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$. Vérifier que

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} P_k(x)\mathrm{d}x.$$

$ii)$ On note $\varphi_k(x) = f(x) - P_k(x)$. Montrer que

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k''(x)(x-x_k)(x-x_{k+1})\mathrm{d}x.$$

$iii)$ En déduire que

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n\right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}.$$

$iv)$ Trouver un exemple de fonction f prouvant que la majoration ci-dessus est optimale.

Exercice 2. Calculer les limites des suites suivantes :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}, \quad v_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}},$$

$$w_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{n}{k^2}, \qquad z_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)\,!}{n!\,n^n}}$$

Exercice 3. Etudier la nature des intégrales impropres suivantes :

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \left(1-\mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$ selon les valeurs de α.

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(2x)-\arctan(x)}{x}\mathrm{d}x$. (Indication : $\arctan(x) = x + o(x)$ en 0 et pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.)

Exercice 4. (Transformation de Laplace)
Soit f continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que $f(t)\mathrm{e}^{-rt}$ est intégrable.

a) Justifier que pour tout $p \geq r$, l'intégrale $L_f(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ converge. La fonction L_f définie sur $[r, +\infty[$ s'appelle la transformée de Laplace de f.
b) Montrer que la fonction L_f est continue sur $[r, +\infty[$, dérivable sur $]r, +\infty[$ et vérifie $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} L_f(p) = 0$. Par la suite on admettra que F est de classe C^∞ sur $]r, +\infty[$.
c) On suppose de plus que f est dérivable et que $f(t)\mathrm{e}^{-rt}$ est bornée. Montrer que la transformée de Laplace de f' est bien définie sur $]r, +\infty[$ et vérifie

$$L_{f'}(p) = pL_f(p) - f(0).$$

d) Soit $F(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$. Montrer que L_F est bien définie sur $[r, +\infty[$ et vérfie

$$L_F(p) = \frac{L_f(p)}{p}.$$

e) On se place sous les hypothèses de la question **c)**. Montrer que $f(0) = \displaystyle\lim_{p\to+\infty} pF(p)$.

Si de plus f' est intégrable, montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$.

f) Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes (pour chacune d'elle on précisera sur quel intervalle elle est définie) :

$t \mapsto t^n, \quad n \in \mathbb{N},$ $\qquad t \mapsto \mathrm{e}^{rt}, \quad r \geq 0,$ $\qquad t \mapsto t^n\mathrm{e}^{rt}, \quad n \in \mathbb{N}$ et $r \geq 0,$
$t \mapsto \cos(\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R},$ $\qquad t \mapsto \sin(\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}.$

g) On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante :

$$ty''(t) - (t+1)y'(t) + 2y(t) = 0, \; y(0) = y'(0) = 0.$$

On note $L(p)$ la transformée de Laplace de la fonction y (elle est a priori définie sur un intervalle $I =]r, +\infty[$).

$i)$ Montrer que pour tout $p \neq 1$ on a $p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}L(p) = -3L(p)$.

$ii)$ Déterminer $L(p)$ en fonction de p.

$iii)$ En déduire les solutions de l'équation différentielle (on pourra utiliser la question f)).

Exercice 5. (Extrait CAPES 2009)
Partie I
Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x.$$

a) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$. (Indication. On pourra, par exemple, utiliser un changement de variables.)
b) Montrer que la suite $(W_n)_n$ est strictement décroissance. (Indication. Pour la décroissance, on pourra comparer les fonctions $x \mapsto \cos^n(x)$ et $x \mapsto \cos^{n+1}(x)$. Pour la stricte décroissance, on pourra raisonner par l'absurde.)
c) A l'aide d'une intégration par parties montrer que, pour $n \geq 0$, on a

$$W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) W_n.$$

d) En déduire que, pour tout entier $p \geq 0$, on a

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}, \quad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

On admettra dans la suite que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
Partie II
[Rappel sur les intégrales multiples et généralisation. (Ce rappel n'est utile que pour les sous-questions e) et g)).

Les notions d'intégrales doubles et triples ainsi que la méthode de calcul par intégrations successives de ces dernières (présentes au programme), se généralisent à toute dimension finie de la manière suivante : étant donné un entier $n \geq 1$, une partie $A_n \subset R^n$ sera dite continûment paramétrable si $n = 1$ et A_1 est un segment ou si $n \geq 2$ et s'il existe une partie $A_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ continûment paramétrable et deux fonctions continues $f, g : A_{n-1} \to \mathbb{R}$ telles que

$$A_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in A_{n-1} \text{ et } f(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leq x_n \leq g(x_1, \ldots, x_{n-1})\}.$$

Avec ces notations, pour une fonction continue $\varphi : A_n \to \mathbb{R}$, on définit l'intégrale multiple de φ sur A_n par la formule suivante :

$$\int \cdots \int_{A_n} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_1 = \int \cdots \int_{A_{n-1}} \left(\int_{f(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{g(x_1,\ldots,x_{n-1})} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \mathrm{d}x_1.$$

On admettra, sans démonstration, qu'à l'instar des intégrales doubles et triples, le réel ainsi obtenu ne dépend que de la partie A_n et de la fonction φ. Le volume de la partie A_n sera alors, par définition, le réel $\displaystyle\int \cdots \int_{A_n} \mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_1$.]

On se propose d'étudier ici le comportement du volume d'une boule de rayon fixé quand on fait varier la dimension de l'espace. Plus précisément, on se fixe un réel $R > 0$ et pour tout entier $n \geq 1$ on considère dans $\mathbb{R}^n$ la boule B_n de centre O et de rayon R :

$$B_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq R^2\}.$$

On note V_n son volume.

e) Montrer que, pour $n \geq 2$, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(x_1, \ldots, x_n) \in B_n \Longleftrightarrow \begin{cases} (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in B_{n-1} \\ -\sqrt{R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2} \leq x_n \leq \sqrt{R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2} \end{cases}.$$

En déduire par récurrence sur $n \geq 1$, que B_n est continûment paramétrable.

f) Soient $\lambda > 0$ un réel et $m \geq 0$ un entier. Montrer, en se servant par exemple d'un changement de variable utilisant la fonction $t \mapsto \lambda \sin t$, que

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \left(\lambda^2 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathrm{d}x = 2\lambda^{m+1} W_{m+1}.$$

g) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ et tout $k = 1, \ldots, n-1$ on a

$$V_n = 2^k \left(\prod_{i=1}^{k} W_i\right) \int \cdots \int_{B_{n-k}} \left(R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-k}^2\right)^{\frac{k}{2}} \mathrm{d}x_{n-k} \cdots \mathrm{d}x_1.$$

(Indication. On pourra, pour n fixé, faire une récurrence finie sur k.)

h) Prouver finalement que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$V_n = \left(\prod_{i=1}^{n} W_i\right) (2R)^n,$$

et par suite, que pour $k \geq 1$

$$V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} R^{2k},$$

et que pour $k \geq 0$

$$V_{2k+1} = 2^{2k+1} \frac{k!}{(2k+1)!} \pi^k R^{2k+1}.$$

Expliciter V_1, V_2, V_3 et V_4.

i) En utilisant la formule de Stirling, $n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, donner des équivalents simples des suites $(V_{2k})_k$ et $(V_{2k+1})_k$.

j) En déduire que $\lim_n V_n = 0$.

k) Montrer que, soit la suite $(V_n)_n$ est décroissante, soit il existe un rang n_0 tel que la suite $(V_n)_n$ soit croissante jusqu'au rang n_0, puis décroissante. (Indication. On pourra calculer simplement le rapport V_{n+1}/V_n grace à la question h) et utiliser les questions b) et d)).

l) Donner les valeurs de R pour lesquelles la suite $(V_n)_n$ est décroissante.

m) Que vaut le rang n_0 de la question k) quand $R = 1$?

Exercice 6. (Intégrales curvilignes)

a) Rappeler la définition d'une 1-forme différentielle ω sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

b) Soit $\gamma : [a, b] \to \Omega$ un arc paramétré. Rappeler la définition de l'intégrale curviligne $\int_\gamma \omega$.

c) Rappeler la formule de Green-Riemann.

d) En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer l'aire de la région du plan délimitée par l'astroide d'équation paramétrique $x(t) = \cos^3(t)$ et $y(t) = \sin^3(t)$.