L1 SV-S2
2010-2011
Mathématiques

# TD n°1: Fonctions de 2 variables

**Exercice 1.** Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis représenter graphiquement ces ensembles dans le plan.

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}},\quad g(x,y)=\ln(x^2-y),\quad h(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}+\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}.$$

**Exercice 2.** Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer leur ensemble de définition puis les courbes de niveaux $\mathcal{C}_k$ demandées. Représenter graphiquement ces courbes de niveaux.

$$\begin{array}{llll}
f(x,y)=2x-3y+1, & k=-1,0,1,2; & g(x,y)=\dfrac{y}{x}, & k=0,1,2;\\
h(x,y)=\dfrac{x^2-y}{y^2-x}, & k=0,-1; & i(x,y)=\dfrac{xy-x+y}{xy}, & k=1,2;\\
j(x,y)=\dfrac{x^4+y^4}{4-x^2y^2}, & k=2; & \ell(x,y)=|x+y|, & k=0,1,2.
\end{array}$$

**Exercice 3.** Soit $f$ la fonction définie par $f(x,y)=x^2+y^2+4x-3y+7$. On note $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=f(x,y)\}$ la surface représentative de $f$.
**a)** Montrer que pour tout réel $k$ la courbe de niveau $\mathcal{C}_k$ est soit un cercle soit l'ensemble vide. On précisera le centre et le rayon du cercle en fonction de $k$.
**b)** En déduire l'allure de $S$.

**Exercice 4.** Déterminer l'ensemble de défintion et calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes:

$$f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}+\sqrt{x},\quad g(x,y)=\ln(\sqrt{x^2+y^2}),\quad h(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

**Exercice 5.** Soit $f(x,y)$ une fonctions donnée et $x(t)=t^2-1$, $y(t)=t$. Exprimer la dérivée de la fonction $g(t)=f(x(t),y(t))$ en fonction des dérivées paritelles de $f$. Vérifier ce résultat avec $f(x,y)=\cos(y^2-x)$.

**Exercice 6.** Déterminer l'équation du plan tangent à la sphère de centre $O$ et de rayon 3 au point $(1,2,2)$. Indication: considérer la fonction $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

**Exercice 7.** Déterminer la direction de plus grande pente de $f(x,y)=xy^2$ en $(2,1)$.
Même question avec $g(x,y)=\mathrm{e}^x\cos(y)$ en $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

**Exercice 8.** Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la tangente en $A$ à la courbe de niveau de la fonction $f$ passant par le point $A$:

$$\begin{array}{llll}
f(x,y)=x^2+y^2, & A=(1,1); & f(x,y)=xy^2, & A=(-1,0);\\
f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}, & A=(1,1); & f(x,y)=x^2-y, & A=(1,1).
\end{array}$$

**Exercice 9.** Préciser l'ensemble de définition de $f(x,y) = xy\ln(x)$ puis calculer ses dérivées partielles secondes.

**Exercice 10.** Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer ses points critiques puis ses extrema:

$$f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 2xy - 6x, \quad g(x,y) = \frac{x^2}{2} + (5+x)(1+y^2), \quad h(x,y) = (x+y)^3 + 3xy.$$

**Exercice 11.** Calculer les intégrales suivantes.

**a)** $\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{-x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 1 \leq y \leq 4\}$.

**b)** $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq \pi \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$.

**c)** $\displaystyle\iint_D x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x \leq 3 \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$.

**d)** $\displaystyle\iint_D x\sin(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq y \leq x\}$.

**e)** $\displaystyle\iint_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq y \leq x \leq 1\}$.

**Exercice 12.** Pour chacune des intégrales suivantes, représenter graphiquement le domaine d'intégration puis calculer l'intégrale en utilisant un changement de variables en coordonnées polaires.

**a)** $\displaystyle\iint_D (x^2 + 2xy + 3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

**b)** $\displaystyle\iint_D (x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$.

**c)** $\displaystyle\iint_D (x^3y + y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0,\ x \geq -y \text{ et } x^2 + y^2 \leq 4\}$.