L1 SV-S2
2010-2011
Mathématiques

TD n°2: Suites

Exercice 1. Pour chacune des suites suivantes, dire si elle est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre. Lorsqu'elle est arithmétique ou géométrique, calculer la somme des 20 premiers termes.

a) $u_n = -\sqrt{5}(n-2)$, $n \in \mathbb{N}$.
b) $v_n = 3 \times 2^{n-3}$, $n \geq 1$.
c) $w_{n+1} = w_n + 5$, $w_0 = 2$.
d) $x_{n+1} = 20x_n$, $x_0 = 1$.
e) $y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n - 1)$, $y_0 = 2$.

Exercice 2. On s'intéresse aux suites vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

a) Quel type de suite obtient-on lorsque $a = 1$?
On supposera dans la suite que $a \neq 1$.

b) Déterminer deux nombres l et q (que l'on exprimera à l'aide de a et b) tels que pour tout n on ait $u_{n+1} - l = q(u_n - l)$.

c) Que peut-on dire de la suite $v_n = u_n - l$? En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Application: Vous souhaitez acheter une voiture. Vos revenus vous permettent de rembourser 300 euros maximum par mois. Pour un prêt d'une durée de 5 ans la banque vous propose un taux d'intérêt de 3% par an, soit 0, 25% par mois.

d) Quel montant pourrez vous ainsi emprunter à la banque? A combien se montera le montant total des intérêts?

e) La voiture que vous souhaitez acheter coûte en fait 20000 euros. Quelle mensualité devriez vous verser pour pouvoir l'acheter grâce au prêt proposé par la banque?

Exercice 3. Soient a et b deux nombres réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = a, \quad u_1 = b, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique, puis qu'elle converge.

b) Calculer de deux façons différentes la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k$. En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge et préciser sa limite.

Exercice 4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ où $k! = k \times (k-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ et par convention $0! = 1$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 3$.
d) Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge.
N.B.: la limite de la suite $(u_n)_n$ est le nombre e.

Exercice 5. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x}{x+1}$. L'objectif est d'étudier le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \geq 0$ $u_{n+1} = f(u_n)$ où $a \in [0, +\infty[$.
a) Etudier rapidement la fonction f et tracer son graphe.
b) Déterminer les points fixes de f et étudier leur stabilité.
c) Reprśenter graphiquement les 4 premiers termes de la suite pour les valeurs de a suivantes: $1/4$, $1/2$, 2 et 5. Conjecturer le comportement de la suite $(u_n)_n$.
d) Etudier précisément la suite $(u_n)_n$ dans les cas $a = 0$ et $a = 1$.
e) On suppose ici que $a \in]0, 1[$.

i) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.
ii) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_n$ est croissante.
iii) En déduire que la suite converge et déterminer sa limite.

f) On suppose finalement que $a > 1$.

i) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
ii) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.
iii) En déduire que la suite converge et déterminer sa limite.

Exercice 6. On s'intéresse à l'évolution d'une population soumise à un certain mode de prédation. Celle-ci est donnée par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{500u_n^2}{40000 + u_n^2}$.
On notera f la fonction $f(x) = \dfrac{500x^2}{40000 + x^2}$.
a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Comment peut-on interpréter ce résultat?
b) Déterminer les points fixes de f.
c) Montrer que $f(x) > x$ si et seulement si $x \in]100, 400[$.
d) Etudier rapidement la fonction f et tracer son graphe.
e) A l'aide d'un graphe, déterminer le comportement limite de la suite $(u_n)_n$ selon les valeurs de u_0. (On distinguera selon la valeur de u_0 par rapport à 100 et 400.)

On souhaite maintenant démontrer le résultat conjecturé à la question précédente.
f) Etudier les cas $u_0 = 100$ et $u_0 = 400$.
g) On suppose que $u_0 < 100$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante (on pourra utiliser la question c)), puis qu'elle converge. Quelle est sa limite?
h) On suppose que $u_0 \in]100, 400[$.

i) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]100, 400[$.
ii) En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante, puis qu'elle converge. Quelle est sa limite?

i) On suppose enfin que $u_0 > 400$.

i) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 400$.
ii) En déduire que la suite $(u_n)_n$ est décroissante, puis qu'elle converge. Quelle est sa limite?

Exercice 7. Dans cet exercice on s'intéresse à l'évolution d'une population dans diverses situations.

Partie I. La population a un taux de croissance $\gamma > 0$, i.e. le nombre d'individus u_n au temps n vérifie $u_{n+1} = \gamma u_n$.

a) Etudier le comportement de la suite $(u_n)_n$ selon les valeurs de γ. Interpréter en termes de l'évolution de la population.

Partie II. Lorsque $\gamma > 1$ le résultat précédent n'est pas raisonnable (la population croît indéfiniment). Les ressources naturelles limitées empêche la population d'avoir une taille supérieure à $M = 30000$ individus. Pour prendre cela en compte, on suppose maintenant que le taux de croissance de la population est $\gamma\left(1 - \frac{u_n}{M}\right)$ (lorsque u_n s'approche de sa valeur maximale M le taux de croissance diminue), i.e. la suite $(u_n)_n$ est donnée par $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \gamma\left(1 - \frac{x}{M}\right)x$. On supposera que $0 < \gamma \leq 4$. La population initiale est de $u_0 \in]0, M]$.

a) En étudiant rapidement la fonction f, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \in [0, M]$. (Le nombre d'individus est donc toujours bien un nombre positif et limité par la capacité maximale M.)

b) On suppose que $\gamma \leq 1$.

i) Déterminer les points fixes de f et étudier leur stabilité.

ii) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante (on pourra étudier le signe de $f(x) - x$) puis déterminer sa limite.

c) On suppose maintenant que $\gamma \in]1, 3[$.

i) Déterminer les points fixes de f.

ii) Etudier leur stabilité.

iii) A l'aide d'un graphe déterminer le comportement de la suite $(u_n)_n$ lorsque n tend vers l'infini.

d) Interpréter les résultats des questions **b)**ii) et **c)**iii) en termes d'évolution de la population.

Partie III. On reprend les notations de la partie II, et on suppose ici que $\gamma = 1,5$. Afin de réguler l'évolution de la population on effectue un prélèvement régulier proportionnel au nombre d'individus. On appelle E le taux d'efficacité de ce prélèvement ($E \in]0, 1[$ est fixé). La nouvelle évolution de la population est donc donnée par $u_0 \in]0, M]$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ où $g(x) = \gamma\left(1 - \frac{x}{M}\right)x - Ex$. (On rappelle que $M = 30000$ et $\gamma = 1,5$.)

a) On suppose que $E \geq 0,5$.

i) Déterminer les points fixes de g.

ii) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante (on pourra étudier le signe de $g(x) - x$) puis déterminer sa limite.

b) On suppose maintenant que $E < 0,5$.

i) Déterminer les points fixes de g.

ii) Etudier leur stabilité.

iii) A l'aide d'un graphe déterminer le comportement de la suite $(u_n)_n$ lorsque n tend vers l'infini.

c) Interpréter les résultats des questions **a)**ii) et **b)**iii) en termes d'évolution de la population.

d) On souhaite stabiliser la population à 5000 individus. Quel taux de prélèvement E doit-on choisir?