Université de Cergy-Pontoise
Département de Mathématiques
L1 MIPI - S2
2016/2017

Cours de Mathématiques : Fonctions d'une variable réelle

-

Polycopié d'Exercices

Chapitre 1 : Logique et nombres réels

Exercice 1. Montrer les identités suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$) :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}$.

Rappel : si $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ et par convention $0! = 1$.

Exercice 3. Démontrer que pour tous nombres réels a et b et pour tout entier naturel n

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k.$$

En déduire que pour tout réel $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exercice 4. On rappelle que si k et n sont des entiers, avec $0 \leq k \leq n$, $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Exercice 5. En utilisant des tables de vérité, montrer que

a) (non (A ou B)) $\Leftrightarrow$ (non A et non B),

b) (non (A et B)) $\Leftrightarrow$ (non A ou non B),

c) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A))$,

d) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow$ (non A ou B).

e) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow$ (non $B \Rightarrow$ non A).

Exercice 6. Écrire la négation de $a \leq b \leq c$ et celle de $a = b = c$.

Exercice 7. Dans chacun des cas suivants , la proposition B est-elle une condition suffisante (CS), une condition nécessaire (CN) ou une condition nécessaire et suffisante (CNS) de la proposition A ?

a) A : "$x^2 \geq x$" et B : "$x \geq 1$"

b) A : "n impair" et B : "n^2 impair"

c) A : "$x^2 < 0$" et B : "$x \geq 10^{10}$"

d) A : "$x \in [1, 3]$" et B : "$x \in [1, 4]$"

Exercice 8. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $1 \leq x < 3$ et $-1 < y \leq 2$. Donner des encadrements de $x + y$, $x - y$, xy, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ et $\frac{x}{y}$.

Même questions en supposant cette fois que $-3 \leq x \leq 2$ et $-5 \leq y \leq 1$.

Exercice 9. Montrer les inégalités suivantes, pour tous x, y réels :

a) Si $x > 0$ alors $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$,

b) $xy \leq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$,

c) $xy \leq \dfrac{x^2 + y^2}{2}$,

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $3x^2 + 4x + 3 = 4x^2 - 3x + 4$.

b) $\frac{3x+4}{4x+2} = x$.

c) $x = \sqrt{3x + 10}$.

d) $\frac{2x+1}{3x-4} = \frac{x+1}{x-1}$.

e) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-3}$.

Exercice 11. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels positifs. Montrer que si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ alors tous les a_k sont nuls.

Exercice 12. On considère un nombre réel $x \geq 0$ et les deux propositions A : "Pour tout réel ε strictement positif, $0 \leq x \leq \varepsilon$" et B : "$x = 0$". Montrer que $A \Rightarrow B$.

Exercice 13. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et représenter graphiquement l'ensemble des solutions :

a) $2x^2 - 3x + 4 < 4x^2 + 2x + 9$,

b) $2x^3 - 5x^2 + 3x \leq 0$,

c) $\dfrac{2x+1}{3x+2} < 0$,

d) $\dfrac{x-1}{x+2} \geq 3$,

e) $\dfrac{1}{x} > x$,

f) $\dfrac{1}{x^2-1} < \dfrac{1}{x}$,

g) $|x + 1| < 0.1$,

h) $|x - 2| > 10$,

i) $|x| < |x + 1|$,

j) $|2x - 1| < |x - 1|$,

Exercice 14. Soient x, y deux nombres réels. On note $\max(x, y)$ le plus grand des deux nombres x et y, et $\min(x, y)$ le plus petit.

a) Montrer que $x + y = \max(x, y) + \min(x, y)$.

b) Montrer que $|x-y| = \max(x,y) - \min(x,y)$.
c) Montrer que $\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$ et que $\min(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$.

Exercice 15. On suppose que $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$ vérifient $|x-a| < |a|$. Montrer qu'alors x est non nul et de même signe que a.

Exercice 16. Soit $x \geq 0$. Montrer que $\dfrac{2x+5}{x+2}$ est plus près de $\sqrt{5}$ que x ne l'est.

Exercice 17.
a) Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.
b) Montrer, en donnant des exemples, que la somme de deux nombres irrationnels peut être rationnelle ou irrationnelle.

Exercice 18. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. $E(x)$ désigne la partie entière de x.
a) Montrer que $E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$.
b) Montrer que $E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E(x)$.

Exercice 19. Soient f_1, f_2 et f_3 des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour chacune des propriétés suivantes, écrire sa négation et illustrer graphiquement la propriété et sa négation.
a) $\forall i \in \{1,2,3\}, \exists a \in \mathbb{R},\ f_i(a) = 1$.
b) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1,2,3\},\ f_i(a) = 1$.
c) $\exists i \in \{1,2,3\}, \forall a \in \mathbb{R},\ f_i(a) = 1$.
d) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists i \in \{1,2,3\},\ f_i(a) = 1$.

Exercice 20. Ecrire la négation des phrases suivantes :
a) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 < n+1$.
b) $\forall a \in A,\ \exists b \in B, a < b^2$ et $a \leq b^3 + 1$.
c) $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x-1| < \alpha \Longrightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon$.

Exercice 21. Pour chcune des phrases suivantes dire si elle est vraie ou fausse. Jutisifer.
a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < xy$.
b) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1$ ou $x^2 < 2$.
c) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \Rightarrow x \geq 0$.

Chapitre 2 : Applications

Exercice 1. On considère trois ensembles A, B, C. Montrer que
a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

e) $(A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C) \Rightarrow (B \subset C)$.

Exercice 2. Soient $A, B \subset E$, $C, D \subset F$, et f une application de E dans F. Montrer que
a) $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$.
b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
d) $(C \subset D) \Rightarrow (f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D))$.
e) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
f) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Exercice 3.
a) Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$.
b) Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = 2x + 5$, est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x - 3| + 4$.
a) Déterminer l'image par f de chacun des sous-ensembles suivants : $[5, 7]$, $[2, 4[$ et $[-1, 2] \cup [5, 7]$.
b) Déterminer l'image réciproque par f de chacun de sous-ensembles suivants : $[3, 6]$, $[5, 7]$ et $[0, 2]$.
c) L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-elle injective ? surjective ?
d) Trouver un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ tel que $f : A \to \mathbb{R}$ soit injective.
e) Trouver un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ tel que $f : A \to [4, 5]$ soit injective.
f) Trouver un sous-ensemble B de $\mathbb{R}$ tel que $f : \mathbb{R} \to B$ soit surjective.
g) Trouver des sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$ tels que $f : A \to B$ soit bijective.

Exercice 6. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que

1. si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective,
2. si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective,
3. si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$,
4. si $g \circ f$ est injective, alors f est injective,
5. si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire à l'aide de symboles logiques les propositions suivantes :
a) La fonction f n'est pas constante.
b) 2 n'est pas l'image d'un réel par f.
c) f prend toujours la même valeur pour des nombres opposés.
d) Aucun réel positif n'est égal à son image.

Exercice 8. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour chacune des assertions suivantes exprimer "en français" ce qu'elle signifie et écrire sa négation. Par exemple "$\forall x \in I,\ -x \in I$ et $f(-x) = f(x)$" signifie "f est paire" et sa négation est "$\exists x \in I,\ -x \notin I$ ou $f(-x) \neq f(x)$".
a) $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$.
b) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I, f(x) = y$.
c) $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ |f(x)| \leq M$.
d) $\forall (x, y) \in I^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
e) $\forall (x, y) \in I^2,\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$.

Exercice 9. Les fonctions valeur absolue et partie entière sont-elles majorées ? minorées ? bornées ? paires ? impaires ? croissantes ? décroissantes ? Dessiner leur graphe.

Exercice 10. Montrer que la fonction $\dfrac{\sin(x)}{4} + \cos(10x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Même question pour la fonction $\dfrac{\cos(x) + 4\sin(x)}{1 + \mathrm{e}^x}$.

Exercice 11. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est *lipschitzienne* de rapport M si et seulement si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

a) Montrer que la fonction g définie par $g(x) = 3x+4$ est lipschitzienne de rapport à préciser.
b) Soit f une fonction lipschitzienne de rapport M. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M|x| + |f(0)|.$$

En déduire que la fonction $\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 3 : Limites des fonctions d'une variable réelle

Exercice 1. Montrer à l'aide de la définition que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0, \quad \lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2.$$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + 5x - 7}{3x^3 - 2x^2 + 5}$.

b) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{2x^3 + x - 4}$.

c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^4 + 3x^2 + x}{2x^3 + x^2 + 3x}$.

d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} x^2 \ln(x^4)$.

e) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln(x)\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 3. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x^3}{1-x^7}$.

b) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1}$.

c) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-4}$.

d) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x+3} - x$.

e) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}$.

f) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x+3x^2}$.

h) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^4(x)}{x^3 \ln(1+x)}$.

i) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$.

j) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$.

k) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\ln(1+x)}$.

l) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{x}$.

m) $\lim_{x\to +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

n) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x+x^2)}{x}$.

o) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(\mathrm{e}^{2x}+x^2)}{x}$.

Exercice 4. Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) Limite éventuelle en 0 de $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) Limite éventuelle en 0 de $xE\left(\frac{1}{x}\right)$ où E désigne la fonction partie entière.

c) Limite éventuelle en 0 de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Ecrire à l'aide de symboles logiques "la fonction f n'admet pas de limite finie en $+\infty$".

b) Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin(x)$. Montrer que pour tout $A \in \mathbb{R}$, $f([A, +\infty[) = [-1, 1]$.

c) En déduire que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ il existe $x_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \geq x_\alpha,\ f(x) \geq (\alpha+1)x.$$

b) En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) - \alpha x = +\infty$.

Exercice 7.

a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout couple de réels (x, y) appartenant à $[a, +\infty[$, on a

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leq \frac{1}{a^2}|x-y|.$$

b) En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon.$$

c) Écrire une formulation de la propriété précédente en termes de limite.

Chapitre 4 : Continuité et fonctions réciproques

Exercice 1.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3x}-1}{x} & \text{si} \quad x < 0, \\ \dfrac{x^2+2x+3}{x^3+1} & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$

La fonction f est-elle continue en 0 ?

b) Soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-1} & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ 2 & \text{si} \quad x = 1, \\ \dfrac{x+1}{3x-1} & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$

La fonction g est-elle continue en 1 ?

Exercice 2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel a la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{x} & \text{si} \quad x < 0, \\ \\ \dfrac{\ln(1+3x)}{2x} & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

est-elle prolongeable par continuité en 0 ? On précisera alors la valeur du prolongement de f en 0.

Exercice 3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

a) Sur quel ensemble D l'expression $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ est-elle bien définie ? On considère $f : D \to \mathbb{R}$.
b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 4. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, et soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \max(f(x), g(x))$. Montrer que h est continue. Indication : on pourra utiliser l'Exercice 14 du Chapitre 1.

Exercice 5. Soit $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction partie entière.
a) En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction E est-elle continue ?
b) En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction E est-continue à droite ?
c) Pour chacun des intervalles I suivants la fonction E est-elle continue sur I ?

$$I = [0,1], \quad I =]0,1[, \quad I = [0,1[, \quad I =]0,1].$$

d) Pour chacun des intervalles I de la question précédente la fonction $E\lceil_I$ est-elle continue ?

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq |x|$.
a) Interpréter graphiquement cette condition.
b) Montrer que f est continue en 0.

Exercice 7. Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. La fonction f est dite *uniformément continue sur I* si elle vérifie la propriété (P) suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |x-y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

a) Quelle est la différence entre cette définition et celle de "f est continue sur I" ?
b) Donner la négation de (P).
c) Montrer que la fonction définie par $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (on pourra choisir dans la négation de (P) : $\varepsilon = 1$, $x = \frac{1}{\eta}$ et $y = x + \frac{\eta}{2}$).
d) Montrer que la fonction $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur $[0,1]$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

a) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si $g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$ alors g est nulle. Indication : on rappelle que l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
b) Montrer que $f(0) = 0$.
c) On pose $\alpha = f(1)$.
- i) Montrer que $f(x) = \alpha x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$ (on pourra commencer par montrer le résultat pour $x \in \mathbb{N}$ puis $x \in \mathbb{Z}$).
- ii) Montrer que $f(x) = \alpha x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Indication : considérer la fonction $g(x) = f(x) - \alpha x$.

Exercice 9.
a) Montrer que l'équation $x^{17} = x^{11} + 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^+$.
b) Montrer que tout polynôme P réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 10. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f([0,1]) \subset [0,1]$, i.e. pour tout $x \in [0,1]$ on a $f(x) \in [0,1]$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 11. Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et p et q deux réels strictement positifs. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que

$$pf(0) + qf(1) = (p+q)f(x_0).$$

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On considère les propriétés suivantes

$P1 : \forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) > 0$ ou $f(x) < 0)$ et $P2 : (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0)$.

a) Les propriétés $P1$ et $P2$ sont-elles équivalentes ?

b) Donner une CS simple sur la fonction f pour que $P1$ et $P2$ soient équivalentes.

Exercice 13.
a) Donner un exemple d'une fonction f sur $[0,1]$, non constante, telle que $\forall x \in [0,1]$, $(f(x))^2 = 1$.
b) Soit f continue sur sur $[0,1]$ telle que $\forall x \in [0,1]$, $(f(x))^2 = 1$. Montrer que f est constante.
c) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions continues sur I telles que pour tout $x \in I$, $(f(x))^2 = (g(x))^2 \neq 0$. Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 14. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$. Pour chacune des affirmations suivantes dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.
a) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f prend une fois et une seule fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
b) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f prend au moins une fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
c) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est strictement monotone alors f prend une fois et une seule fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
d) Si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ est continue et bornée alors f admet un maximum et un minimum.
e) Si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ est continue et bornée alors f admet un maximum ou un minimum.
f) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et ne s'annule pas alors $\frac{1}{f}$ est bornée.
g) L'image du segment $[a,b]$ par une fonction continue est un segment $[c,d]$.
h) L'image de l'intervalle $]a,b[$ par une fonction continue est un intervalle $]c,d[$.
i) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si l'image de $[a,b]$ par f est un segment alors f est continue.
j) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si l'image de $[a,b]$ par f n'est pas un segment alors f n'est pas continue.
k) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et croissante alors f est injective.
l) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est telle que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que f soit décroissante sur $[M,+\infty[$.

Exercice 15. Donner un exemple de fonction f continue et définie sur $[0,1[$ telle que
a) f ne soit pas majorée.
b) f ne soit pas minorée.
c) f soit majorée mais n'a pas de maximum.
d) f soit minorée mais n'a pas de minimum.

Exercice 16. Donner un exemple de fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que
a) f ne soit pas majorée.
b) f ne soit pas minorée.
c) f soit majorée mais n'a pas de maximum.
d) f soit minorée mais n'a pas de minimum.

Exercice 17.
a) Démontrer que la fonction réciproque d'une fonction impaire bijective est impaire.
b) Pourquoi ne peut-on pas parler de la fonction réciproque d'une fonction paire ?

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$. Montrer que f est continue, bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$ et déterminer sa réciproque f^{-1} (on précisera bien l'ensemble de définition de f^{-1}).

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{2x+2} & \text{si} \quad x < -1, \\ 2x+3 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0, \\ x^2+2x+3 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

a) Tracer son graphe.
b) Montrer que f est continue et strictement croissante.
c) Donner les formules définissant sa fonction réciproque f^{-1} (en précisant bien son ensemble de définition) et tracer le graphe de f^{-1}.

Exercice 20. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ on a

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{et} \quad \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Exercice 21. Simplifier les expressions suivantes

a) $\cos(2\arccos(x))$	**c)** $\sin(2\arccos(x))$	**e)** $\sin(2\arctan(x))$
b) $\cos(2\arcsin(x))$	**d)** $\cos(2\arctan(x))$	**f)** $\tan(2\arcsin(x))$

Exercice 22. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 23. Soient f et g deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$. On veut montrer qu'il existe un point c dans $[0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$. On raisonne par l'absurde. On suppose que le résultat est faux.
a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\underbrace{(\forall x \in [0,1],\ f(x) - g(x) > \alpha)}_{(1)} \quad \text{ou} \quad \underbrace{(\forall x \in [0,1],\ g(x) - f(x) > \alpha)}_{(2)}.$$

On note $f_n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois) et $g_n = g \circ g \circ \cdots \circ g$.
b) Montrer que les fonctions f_n et g_n sont continues sur $[0, 1]$.
c) Dans le cas (1), montrer que $\forall n > 0$, $\forall x \in [0, 1]$, $f_n(x) - g_n(x) > n\alpha$. En déduire que (1) ne peut pas arriver.
d) Montrer de la même manière que (2) ne peut pas arriver. Conclure.

Chapitre 5 : Dérivabilité

Exercice 1. En utilisant la définition, calculer la dérivée des fonctions suivantes.
a) $f(x) = ax + b$ en tout $x_0 \in \mathbb{R}$.
b) $f(x) = \sqrt{x}$ en tout $x_0 > 0$. f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 2. Montrer que les fonctions sinh, cosh et tanh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leur dérivée.

Exercice 3. On rappelle que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.
a) En utilisant la définition, montrer que les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leur dérivée.
b) Montrer que la fonction tan est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.

Exercice 4. Calculer les dérivées des fonctions suivantes

a) $x^3 e^x$
b) $\dfrac{\sin(x)}{1+x^2}$
c) $\cos(3x-1)$
d) $\ln(1+x^2)$
e) $\dfrac{1}{1+\tan(x)}$
f) $\sin(x^5+2x)$
g) $\sin(\cos(x))$
h) $\ln(\ln(\ln(x)))$
i) $\exp(\exp(x))$
j) 2^x
k) a^x, $a \in \mathbb{R}$
l) $\sin\left(\dfrac{x^2}{\cos(x^2)}\right)$

Exercice 5. Calculer f' en fonction de g' dans les cas suivants
a) $f(x) = g(x^2+3x)$.
b) $f(x) = g(x+g(x))$.

Exercice 6. Étudier et calculer si elle existe la dérivée en 0 des fonctions f et g définies par

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Exercice 7. Soient g et h deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, dérivables en 0 et telles que $g(0) = h(0)$. On définit la fonction f par

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x < 0, \\ h(x) & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur g et h pour que f soit dérivable en 0 (On pourra essayer de deviner la solution en raisonnant graphiquement).

Exercice 8. Soit $f(x) = 2xe^{x^2}$.
a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est dérivable.

b) Calculer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.
c) Montrer que f^{-1} est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $(f^{-1})''(0)$.

Exercice 9. Montrer que

a) La fonction arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et que $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) La fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et que $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

c) La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

d) pour tout $x \in [-1,1]$, $\arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

e) Simplifier, pour $x \neq 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 10. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan(x) + \arctan(2x)$.
a) Étudier f et tracer sa courbe représentative.
b) Montrer que f est une bijection (de quel ensemble dans quel ensemble ?) et faire l'étude de la fonction réciproque. Tracer sa courbe représentative.

Exercice 11. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin(4x^3 - 3x)$.
a) Déterminer le domaine de définition de f. Étudier la continuité de f.
b) Étudier sa dérivabilité.
c) Montrer que $f(x) = -3\arcsin(x)$ si $x \in [-1/2, 1/2]$.
d) Calculer $f(x)$ pour $x \in [1/2, 1]$.

Exercice 12. Comparer les fonctions définies par $f(x) = \arccos(x)$ et $g(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$.

Exercice 13. On rappelle que les fonctions sinh, cosh et tanh sont définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \ \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \ \text{ et } \ \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

a) i) Montrer que la fonction sinh est dérivable sur $\mathbb{R}$, impaire, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note Argsinh sa bijection réciproque.
ii) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Argsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
iii) Montrer que Argsinh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\operatorname{Argsinh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

b) i) Montrer que la fonction cosh est dérivable sur $\mathbb{R}$, paire, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$. On note Argcosh sa bijection réciproque.
ii) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\operatorname{Argcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.
iii) Montrer que Argcosh est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $\operatorname{Argcosh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

c) i) Montrer que la fonction tanh est dérivable sur $\mathbb{R}$, impaire, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$. On note Argtanh sa bijection réciproque.

ii) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $\text{Argtanh}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

iii) Montrer que Argtanh est dérivable sur $]-1,1[$ et que $\text{Argtanh}'(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$.

Exercice 14. Soit f la fontion définie par $f(x) = \ln(\tanh(x/2))$.

a) Faire l'étude de f (on précisera bien son ensemble de définition).

b) Montrer que f est bijective (de quel ensemble vers quel ensemble ?) et déterminer f^{-1}.

Exercice 15. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (justifier).

a) Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0. La réciproque ?

b) Si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 alors f est dérivable en x_0.

c) Si f est dérivable sur $]0,2[$ et $f'(1) = 0$ alors f admet un extremum local en 1.

d) La dérivée de $f(x) = \cos(2x)$ est $f'(x) = -\sin(2x)$.

e) On peut appliquer le théorème de Rolle à $f(x) = |x|$ sur $[-1,1]$. Même question avec $g(x) = 5x^2 + 3$ sur $[0,2]$.

Exercice 16. En utilisant des théorèmes du cours, montrer que

a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.

b) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)a^n < \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} < (n+1)b^n$.

c) Si $a_0, \ldots, a_n$ vérifient $a_0 + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ alors $\exists x \in]0,1[$ tel que $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$.

Indication : considérer la fonction f définie par $f(x) = a_0 x + a_1 \dfrac{x^2}{2} + \cdots + a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Exercice 17. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = -1$. Montrer que

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = -1$.

b) $\exists x_1 \in]0,1[$, $f(x_1) < 0$.

c) $\exists x_2 \in]0,1[$, $f(x_2) = 0$.

d) $\exists x_3 \in]0,1[$, $f'(x_3) = 0$.

Exercice 18. Soit f continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$ et telle que $f(0) = 0$ et f' soit croissante.

a) Montrer que $\forall x > 0$, $f(x) \leq x f'(x)$.

b) Soit $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Montrer que g est croissante.

Exercice 19.

a) Montrer que l'on a $\forall x \in]0,\pi[$, $x\cos(x) - \sin(x) < 0$.

b) Étudier le sens de variation de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ sur l'intervalle $]0,\pi]$.

c) Soient a et b des nombres réels tels que $0 < a < b < \pi$. Montrer que l'on a $\dfrac{a}{b} < \dfrac{\sin(a)}{\sin(b)}$.

Exercice 20. Soit p un entier positif.

a) Montrer que la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{(1+x)^p}{1+x^p}$ a pour maximum 2^{p-1}.

b) Soient a et b des nombres réels positifs. Montrer que $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.

Exercice 21. Soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$ avec $0 < a < b$. On suppose de plus que f est continue sur $[a, b]$ et que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe une tangente à la courbe représentative de f qui passe par l'origine. Indication : on pourra introduire la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

Exercice 22. Soit f une fonction polynômiale réelle, ayant n racines réelles distinctes. Montrer que f' en a au moins $n-1$.

Exercice 23. Calculer, à l'aide du théorème des accroissements finis

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} \right).$$

Exercice 24. Soit $g_1(x)$ la dérivée d'ordre 1 de $x^2 - 1$, $g_2(x)$ la dérivée d'ordre 2 de $(x^2-1)^2$, et pour tout entier n soit $g_n(x)$ la dérivée d'ordre n de $(x^2-1)^n$.

a) Calculer $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour $0 < p \leq n$, $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$.

b) Calculer la dérivée d'ordre p de $(x-1)^n$ puis celle de $(x+1)^n$.

c) En déduire la dérivée d'ordre p de $(x-1)^n$ en 1 et celle de $(x+1)^n$ en -1.

d) Calculer les dérivées d'ordre p en 1 et -1 de $(x^2-1)^n$, $0 \leq p \leq n$.

e) Montrer que si $n \neq 0$, $g_n(x)$ s'annule au moins n fois dans $]-1, 1[$. (Indication : utiliser d) et le Théorème de Rolle.)

Exercice 25. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\exists C > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^2.$$

Montrer que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = 0$. Que peut-ton en déduire sur f ?

Exercice 26. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, et $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ si $x > 0$.

a) Montrer que f est infiniment dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et calculer f' sur chacun de ces intervalles.

b) Vérifier que f est continue en 0.

c) Montrer que f est dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?

d) Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

N.B. : On peut en fait montrer que la fonction f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut alors $f^{(n)}(0)$?

Exercice 27. Pour une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, on considère la propriété suivante

$$(P): \qquad \forall a, b \in \mathbb{R},\ f(b) - f(a) = (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

a) Soient $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$ et f définie par $f(x) = Ax^2 + Bx + C$. Montrer que f vérifie (P).
b) Soit f de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ vérifiant (P). Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 pour f entre a et $\frac{a+b}{2}$, puis entre b et $\frac{a+b}{2}$. En déduire que pour tout $d \in \mathbb{R}$ on a $f^{(3)}(d) = 0$. En déduire que f est un polynôme de degré au plus 2.
c) Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant (P). Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{f(x+1)-f(x-1)}{2}$. En déduire que f est de classe C^3. Conclure.
d) Interpréter graphiquement la propriété (P).

Exercice 28. Déterminer la dérivée n-ème de la fonction $f(x) = x^n(1+x)^n$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Chapitre 5 : Développements limités

Exercice 1. Soient f et g deux fonctions dont le développement limité à l'ordre 1 en 0 est donné par

$$f(x) = 1 + 3x + x\varepsilon_1(x), \quad g(x) = 2 + x + x\varepsilon_2(x).$$

Donner des développements limités à l'ordre 1 en 0 des fonctions suivantes

$$f + 4g,\ fg,\ f^2,\ \frac{1}{f},\ \frac{f}{g}.$$

Exercice 2. Calculer les développements limités suivants en 0.

a) $\sin(2x) - 2(\mathrm{e}^x - 1)$ à l'ordre 7.
b) $\sin(x)\mathrm{e}^x$ à l'ordre 2.
c) $\dfrac{x\sin^2(x)}{1+x+x^2}$ à l'ordre 5.
d) $\dfrac{\cos(x)}{\mathrm{e}^x}$ à l'ordre 3.
e) $\sin(x\mathrm{e}^x)$ à l'ordre 3.
f) $\ln(1 + x\cos(x))$ à l'ordre 4.
g) $\ln(e^x + e^{-x})$ à l'ordre 4.
h) $\dfrac{\sin(x)}{\ln(1+x)}$ à l'ordre 2.

Exercice 3. Calculer les développements limités suivants
a) $\dfrac{\ln(x)}{x^2}$ en 1 à l'ordre 2.
b) $\sin(\cos(x))$ en 0 à l'ordre 2.

c) $\cos(x)$ en $\dfrac{\pi}{2}$ à l'ordre 6.

Exercice 4. Dans un examen récent, on demandait de donner le développement limité de la fonction

$$f(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)},$$

à l'ordre 2 en 0. Un étudiant a donné comme réponse

$$f(x) = \frac{5}{2} - x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

Expliquer pourquoi le correcteur s'est immédiatement rendu compte que le résultat était faux. Expliquer comment l'étudiant a trouvé ce résultat et pourquoi sa méthode ne marche pas ! (Indication : attention au DL de l'exponentielle).

Exercice 5. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes à l'aide de développements limités.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\sin(x) - x\cos(x) - 2x}{x^5}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x) - \arctan(x)}{(1+x^3)^2 - 1}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \cos(x) - x}{x - \ln(1+x)}$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \cos(x)}{1 - \sqrt{1-x^2}}$.

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\tan(x) - \tan(2x)}{x(1-\cos(3x))}$.

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Exercice 6. Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer, si elle existe, la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+2h) + f(a) - 2f(a+h)}{h^2}.$$