
TD n°1: Formalisme mathématique et nombres réels

Exercice 1. Montrer les identités suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$) :

a) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2},$

b) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$

c) $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$

Exercice 2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}.$

Rappel : si $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ et par convention $0! = 1$.

Exercice 4. Démontrer que pour tous nombres réels a et b et pour tout entier naturel n on a

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

En déduire que pour tout réel $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$

Exercice 5. On rappelle que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$ on a

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

b) Démontrer la formule du binôme de Newton (raisonner par récurrence sur n)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exercice 6. Montrer les inégalités suivantes, pour tout x, y, z réels :

a) Pour $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2,$

b) $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$

c) $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2},$

d) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$

Exercice 7. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+.$ Montrer que $\prod_{i=1}^n (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i,$ et étudier le(s) cas d'égalité.

Exercice 8. Dans chacun des cas, la proposition B est-elle une condition suffisante (CS), une condition nécessaire (CN) ou une condition nécessaire et suffisante (CNS) de la proposition A ?

- a) A : “ $x^2 \geq x$ ” et B : “ $x \geq 1$ ”
 b) A : “ n impair” et B : “ n^2 impair”
 c) A : “ $\forall n \in \mathbb{N}, x \geq n$ ” et B : “ $x \geq 10^{10}$ ”
 d) A : “ $x \in [1, 3]$ ” et B : “ $x \in [1, 4]$ ”

Exercice 9. En utilisant des tables de vérité, montrer que

- a) $(\text{non } (A \text{ ou } B)) \Leftrightarrow (\text{non } A \text{ et non } B)$,
 b) $(\text{non } (A \text{ et } B)) \Leftrightarrow (\text{non } A \text{ ou non } B)$,
 c) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow A))$,
 d) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non } A \text{ ou } B)$.
 e) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non } B \Rightarrow \text{non } A)$.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Montrer que si $2^n - 1$ est premier alors n est premier.

Exercice 11. Écrire la négation de $a \leq b \leq c$ et celle de $a = b = c$.

Exercice 12. Prendre la négation des phrases suivantes:

- a) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 < n + 1$.
 b) $\forall a \in A, \exists b \in B, a < b^2$ et $a \leq b^3 + 1$.
 c) $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - 1| < \alpha \implies |x^2 - 1| < \varepsilon$.

Exercice 13. Soient f_1, f_2 et f_3 des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour chacune des propriétés suivantes, écrire sa négation et illustrer graphiquement la propriété et sa négation.

- a) $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \exists a \in \mathbb{R}, f_i(a) = 1$.
 b) $\exists i \in \{1, 2, 3\}, \forall a \in \mathbb{R}, f_i(a) = 1$.
 c) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, 2, 3\}, f_i(a) = 1$.
 d) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, 2, 3\}, f_i(a) = 1$.

Exercice 14. Résoudre dans \mathbb{R} :

- a) $3x^2 + 4x + 3 = 4x^2 - 3x + 4$.
 b) $\frac{3x+4}{4x+2} = x$.
 c) $x = \sqrt{2x+3}$.
 d) $\frac{2x+1}{3x-4} = \frac{x+1}{x-1}$.
 e) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-3}$.

Exercice 15. On suppose que $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$ vérifient $|x - a| < |a|$. Montrer qu'alors x est non nul et de même signe que a .

Exercice 16. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes et représenter graphiquement l'ensemble des solutions :

- | | | |
|--|-----------------------------------|--|
| a) $2x^2 - 3x + 4 < 4x^2 + 2x + 9$, | f) $ x + 1 < 0.1$, | k) $\sqrt{x^2 - 2x + 3} \leq x - 1$, |
| b) $2x^3 - 5x^2 + 3x \leq 0$, | g) $ x - 2 > 10$, | l) $ 2x - 1 < x - 1 $, |
| c) $\frac{2x + 1}{3x + 2} < 0$, | h) $ x < x + 1 $, | m) $\sqrt{x - 3} - \sqrt{2x + 1} \leq 4$, |
| d) $\frac{1}{x} > x$, | i) $ x + 3 - 1 \leq 2$, | n) $\sqrt{x - 1} > 2 - \sqrt{x}$. |
| e) $\frac{1}{x^2 - 1} < \frac{1}{x}$, | j) $\frac{x - 1}{x + 2} \geq 3$, | |

Exercice 17. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq x < 3$ et $-1 < y \leq 1$. Donner des encadrements de $x + y, xy, \frac{1}{x}$, et $\frac{x}{y}$.

Exercice 18. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. $E(x)$ désigne la partie entière de x .

- a) Montrer que $E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$.
 b) Montrer que $E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E(x)$.

Exercice 19. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{2\sqrt{n}} < (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

En déduire la valeur de $E\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ (où $E(\cdot)$ désigne la partie entière).

Exercice 20. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 21. Soit $x \geq 0$. Montrer que $\frac{2x+5}{x+2}$ est plus près de $\sqrt{5}$ que x ne l'est.

Exercice 22. Soient a_1, a_2 dans \mathbb{R} et r_1 et r_2 strictement positifs. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - a_1| \leq r_1$ et $|y - a_2| \leq r_2$. Montrer que $|xy - a_1a_2| \leq r_1r_2 + |a_2|r_1 + |a_1|r_2$.

Exercice 23. Placer les symboles \Leftarrow, \Rightarrow et \Leftrightarrow qui conviennent entre les propositions et écrire les contraposées des implications.

- $A : "x \leq 0"$ et $B : "x < 0"$.
- $A : "|x - x_0| < \alpha"$ et $B : "x < x_0 + \alpha"$.
- $A : "\forall x, x \text{ vérifie la propriété } P"$ et $B : "\exists x, x \text{ vérifie la propriété } P"$.
- $A : "C \cap D = C"$ et $B : "C \subset D"$.
- $A : "C \cup D = C"$ et $B : "D \subset C"$.

Exercice 24. On considère un nombre réel $x \geq 0$ et les deux propositions $A : "Pour tout réel \varepsilon$ strictement positif, $0 \leq x \leq \varepsilon"$ et $B : "x = 0"$. Montrer que $A \Rightarrow B$.

Exercice 25. Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.

Exercice 26. Soit a_1, \dots, a_n des nombres positifs. Montrer que si $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ alors $\forall i, a_i = 0$.

Exercice 27. Montrer si les phrases suivantes sont vraies ou fausses.

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < xy$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1$ ou $x^2 < 2$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \Rightarrow x \geq 0$.

Exercice 28. Écrire les assertions suivantes et leurs négations avec des quantificateurs (on pourra utiliser la notation $a|b$ pour signifier que l'entier a divise l'entier b). Dans chaque cas, dire si l'assertion est vraie ou fausse et le justifier.

- Tout entier naturel divisible par 6 est divisible par 3.
- Tout entier naturel divisible par 2 et 3 est divisible par 6.
- Tout entier naturel divisible par 2 et 14 est divisible par 28.

Exercice 29. Montrer

- $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in [1, 3], |x - 2| < \alpha \Rightarrow |x^2 - 4| < \epsilon$.
- $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - 2| < \alpha \Rightarrow |x^2 - 4| < \epsilon$.

Exercice 30. On considère trois ensembles A, B, C . Montrer que

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \Rightarrow (B \subset C)$.

Exercice 31. Soient $A, B \subset E, C, D \subset F$, et f une application de E dans F . Montrer que

- $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$.
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
- $(C \subset D) \Rightarrow (f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D))$.
- $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

f) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Exercice 32. Soit E un ensemble. Pour A une partie de E , on note 1_A la *fonction indicatrice* (ou caractéristique) de l'ensemble A définie par

$$1_A : E \rightarrow \{0, 1\}, \quad 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

a) On prend $E = \mathbb{R}$. Donner le graphe de $1_{[0,1]}$ et $1_{[0,1] \cup [2,3]}$.

b) Montrer que si $A \subset B$ alors $1_A \leq 1_B$.

c) Montrer que $1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B$

d) Déterminer une relation entre $1_{A \cup B}$, 1_A et 1_B

e) Que peut-on dire de $1_{A \cup B \cup C}$?

Exercice 33. Soit $E = \{x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{1}{n} \leq x \leq 1\}$. Montrer que $E =]0, 1]$.

Exercice 34.

a) Déterminer une bijection de \mathbb{N} dans \mathbb{N}^* .

b) Déterminer une bijection de \mathbb{N} dans l'ensemble des entiers pairs.

c) Déterminer une bijection de \mathbb{N} dans \mathbb{Z} .

d) Déterminer une bijection de \mathbb{N} dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

e) Déterminer une bijection de \mathbb{N} dans \mathbb{Q} .

f) Déterminer une bijection de $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ dans $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}\}$.

g) Dédurre de l'exemple précédent une bijection de $[0, 1]$ dans $[0, 1[$.

Exercice 35.

a) Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 5$ est bijective. Calculer f^{-1} .

b) Montrer que $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, x') \mapsto (x + x', x - x')$ est bijective. Calculer f^{-1} .