L1 MPI
2012/2013
S1 Mathématiques

TD n^{o}2: Suites de nombres réels

Exercice 1. Écrire à l'aide de quantificateurs les propriétés suivantes :
a) La suite u est positive à partir d'un certain rang.
b) La suite u est constante à partir d'un certain rang. Comment s'appelle une telle suite ?
c) La suite u est croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 2. Une suite arithmétique de raison r est-elle croissante? décroissante? constante?
Mêmes questions pour une suite géométrique de raison r.

Exercice 3. Soient u et v deux suites bornées et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $u + v$ et λu sont bornées.

Exercice 4. Montrer qu'une suite u est majorée, resp. minorée, si et seulement si elle est majorée, resp. minorée, à partir d'un certain rang.

Exercice 5. Une suite arithmétique de raison r est-elle majorée? minorée? bornée?
Mêmes questions pour une suite géométrique de raison r.

Exercice 6. Donner un exemple de suite:
a) Croissante et majorée.
b) Ni croissante, ni décroissante.
c) Ni majorée, ni minorée.
d) Croissante, ni strictement croissante à partir d'un certain rang ni stationnaire.

Exercice 7. Écrire la définition de “la suite u est divergente”.

Exercice 8. Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{3n-1}{2n+3}$ tend vers $3/2$ en utilisant la définition.

Exercice 9. Montrer en utilisant la définition que si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et $u_n \to a$, alors $a \geq 0$ et $\sqrt{u_n} \to \sqrt{a}$.

Exercice 10. Montrer en utilisant la définition que $(\sqrt{n})_n$ tend vers $+\infty$.

Exercice 11. Étudier la convergence des suites de termes généraux suivantes.

a) $(-1)^n \dfrac{n+1}{n}$
b) $\dfrac{n}{n+1}$
c) $\dfrac{1}{n^2+1}$
d) $\dfrac{n}{n^2+1}$
e) $n - \sqrt{n^2 - n}$
f) $\sqrt{n(n+1)} - n$,
g) $\dfrac{n}{2} \sin \dfrac{n\pi}{2}$
h) $\dfrac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$
i) $\sin(\dfrac{2n\pi}{3})$
j) $\dfrac{E(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$,
k) $\dfrac{\cos(n\theta)}{n}$,
l) $\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$,
m) ne^{-n},
n) $\dfrac{2^n - 3^{n+1}}{5^{2n}}$,
o) $\ln\left(\dfrac{1+n}{n^2}\right)$,
p) $\dfrac{n^2 + (-1)^n\sqrt{n}}{2n+1}$.

Rappel : $\sin(k\pi) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$; $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$.

Exercice 12. Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$ et si $u_n \to 0$ alors $\frac{1}{u_n} \to +\infty$.

Exercice 13. Soient u_0 et v_0 deux réels tels que $u_0 < v_0$. On définit les suites u et v par $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$. En déduire que ces deux suites convergent et ont la même limite.

Exercice 14. Montrer que

$$\bigcap_{n\geq 1}\left[1-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right]=[1,2].$$

Exercice 15. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

Montrer que la suite u est convergente et calculer sa limite. (Indication : trouver un encadrement et utiliser le théorème des gendarmes.)

Exercice 16. Soit $u_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{1}{2^k}=\cos\frac{1}{2}\times\cdots\times\cos\frac{1}{2^n}$. Etudier la convergence de cette suite et calculer sa limite éventuelle. (Indication : utiliser la relation $\sin(2x)=2\sin x\cos x$.)

Exercice 17. Soient a et b les suites définies par $0<a_0<b_0$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$ et $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $0<a_n<b_n$.

b) Montrer que a est croissante et b est décroissante.

c) En déduire que les suites a et b convergent.

d) Montrer que les suites a et b ont même limite.

Exercice 18. Soit A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que $A\subset B\Longrightarrow\sup A\leq\sup B$.

Exercice 19. Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$, on définit $A+B=\{a+b\,|\,a\in A,\,b\in B\}$.

a) Soient $A=[0,1[$ et $B=\{1\}$. Déterminer $A\cup B$ et $A+B$.

b) On suppose que A et B admettent chacun un plus grand élément. Montrer que $A+B$ admet un plus grand élément et que $\max(A+B)=\max A+\max B$.

On suppose que A et B sont majorées.

c) Montrer que $A\cup B$ et $A+B$ sont majorées.

d) Montrer que $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

e) Déterminer $\sup(A\cup B)$.

f) Est-ce que $\sup(A\cap B)=\min(\sup A,\sup B)$?

Exercice 20. Soit $A=\left\{\dfrac{1+\cos n}{n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

a) Soit u la suite de terme général $\dfrac{1+\cos n}{n}$, $n\geq 1$. Est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

b) Montrer que A admet un max.

c) Calculer $\inf A$. A admet-il un min ?

Exercice 21. Pour chacune des affirmations suivantes dire si elle est vraie ou fausse. (Justifier la réponse.)

a) Une suite convergente dont tous les termes sont des entiers est constante à partir d'un certain rang.

b) Si pour tout $p\in\mathbb{N}$, u_{2p} est positif et u_{2p+1} est négatif, alors la suite u diverge.

c) Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}nu_n=1$ alors la suite u converge.

d) Si la suite $(nu_n)_n$ est bornée alors la suite u converge.

e) Si u est croissante, alors u tend vers $+\infty$.

f) Une suite non majorée tend vers $+\infty$.

g) Si $u_n\to\frac{1}{2}$ alors la suite u est positive partir d'un certain rang.

h) Toute suite monotone est convergente.

i) Toute suite croissante et majorée est bornée.

j) Si la suite u est décroissante et $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\geq 0$, alors $u_n\to 0$.

k) Une suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

l) Si $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n<v_n$ et $v_n\to 0$ alors $u_n\to 0$.

m) Si la suite $u_n\to l$ alors $u_{n+1}-u_n\to 0$.

n) Si la suite $(|u_n|)_n$ converge alors la suite $(u_n)_n$ converge.

o) Si les suites u et v divergent alors la suite $u+v$ diverge.
p) Si les suites u et v divergent alors la suite uv diverge.
q) Si la suite u converge et la suite v diverge alors la suite $u+v$ diverge.
r) Si la suite u converge et la suite v diverge alors la suite uv diverge.
s) Pour toute suite v, si $u_n \to 0$ alors $u_n v_n \to 0$.
t) Si $u_n v_n \to 0$ alors soit $u_n \to 0$ soit $v_n \to 0$. (*Indication*: considérer l'exemple $u_n = (1+(-1)^n)/2$, $v_n = (1-(-1)^n)/2$.)
u) Si $u_n \to l$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ alors $l > 0$.
v) Si u est une suite croissante et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq 7$ alors $u_n \to 7$.
w) On ne modifie pas le fait qu'une suite converge ou diverge en modifiant un nombre fini de ses termes.

Exercice 22. Soit a_n une suite de réels *positifs* telle que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{m+n} \leq a_m + a_n.$$

a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad a_{np} \leq n a_p$.
On rappelle que pour deux entiers naturels non nuls n et p quelconques, il existe deux entiers naturels q et r tels que $n = pq + r$ et $0 \leq r \leq p-1$.
b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \exists q \in \mathbb{N}, \quad \exists r \in \{0, \ldots, p-1\}, \quad a_n \leq q a_p + a_r.$$

c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \exists r \in \{0, \ldots, p-1\}, \quad \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_p}{p} + \frac{a_r}{n},$$

et donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_p}{p} + \frac{\max\{a_0, \ldots, a_{p-1}\}}{n}.$$

d) Justifier que l'ensemble $\left\{\frac{a_k}{k} \mid k \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet une borne inférieure qu'on notera λ.
Dans les deux questions qui suivent, ε désigne un réel strictement positif fixé.
e) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{a_p}{p} < \lambda + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
f) En déduire que, pour ce p, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda \leq \frac{a_n}{n} < \lambda + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\max\{a_0, \ldots, a_{p-1}\}}{n}.$$

g) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \lambda$.

Exercice 23. Montrer que si une suite u a ses deux suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ qui convergent et ont la même limite l alors la suite u converge vers l.

Exercice 24. Soit $(u_n)_n$ une suite telle que les suites extraites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent. Montrer que $(u_n)_n$ converge. (Indication : faire intervenir les suites extraites $(u_{6n})_n$ et $(u_{6n+3})_n$.)

Exercice 25. Soit $(u_n)_n$ une suite convergente vers l. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_0^n u_p$ (v est la moyenne de Césaro de u). Montrer que la suite v converge vers l.
Indications : traduire la convergence de la suite u_n vers l : "$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ldots$", puis découper la somme qui définit v_n avec l'entier n_0 introduit dans la définition en deux sommes et enfin étudier la limite de chacune des 2 sommes.

Exercice 26. Soit $A \subset \mathbb{R}$. On rappelle que A est *dense* dans $\mathbb{R}$ si pour tous x, y dans $\mathbb{R}$ avec $x < y$ il existe $a \in A$ tel que $x < a < y$. Montrer qu'un ensemble A est dense si et seulement si tout élément de $\mathbb{R}$ est la limite d'une suite d'éléments de A, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to x$.

Exercice 27. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, l'objectif de cet exercice est de montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$. On note $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$.
a) Montrer que, si $x \neq 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. Pourquoi a-t-on supposé $x \neq 0$?
b) En déduire que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $|u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}|u_n|$.

c) Montrer que pour tout $n \geq n_0$ on a $|u_n| \leq \dfrac{2^{n_0}}{2^n}|u_{n_0}|$.

d) Conclure.

Exercice 28. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On considère la suite u de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. On va montrer que u converge.

a) On suppose dans cette question que $x \geq 0$.

i) Montrer que la suite u est croissante.

ii) En écrivant u_n comme $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=n_0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ (pour $n \geq n_0$) et en utilisant le **c)** de l'Exercice 27, montrer que pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n \leq u_{n_0} + 2u_{n_0}\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0+1}\right)$. En déduire que la suite u est majorée.

iii) Conclure.

b) On suppose cette fois que $x < 0$. On note $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

i) Montrer que la suite v est décroissante à partir d'un certain rang.

ii) Montrer que la suite w est croissante à partir d'un certain rang.

iii) Montrer que les suites v et w convergent vers une même limite.

iv) Conclure (on pourra utiliser l'Exercice 23).

N.B. on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \mathrm{e}^x$.