L1 MPI
2012/2013
S1 Mathématiques

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

TD n^{o}4: Fonctions et limites

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire à l'aide de symboles logiques les propositions suivantes :
a) La fonction f n'est pas constante.
b) 2 n'est pas l'image d'un réel par f.
c) f prend toujours la même valeur pour des nombres opposés.
d) Aucun réel positif n'est égal à son image.

Exercice 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour chacune des assertions suivantes exprimer "en français" ce qu'elle signifie et écrire sa négation. Par exemple "$\forall x \in I,\ -x \in I$ et $f(-x) = f(x)$" signifie "f est paire" et sa négation est "$\exists x \in I,\ -x \notin I$ ou $f(-x) \neq f(x)$".
a) $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$.
b) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I, f(x) = y$.
c) $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ |f(x)| \geq M$.
d) $\forall (x, y) \in I^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
e) $\forall (x, y) \in I^2,\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$.
f) $\forall x \in I,\ f(x) = 0 \Rightarrow x \leq 0$.

Exercice 3. Les fonctions valeur absolue et partie entière sont-elles majorées ? minorées ? bornées ? paires ? impaires ? croissantes ? décroissantes ? Dessiner leur graphe.

Exercice 4. Tracer la fonction $f(x) = E\,(x + 1/2)$. Est-elle impaire?

Exercice 5. Montrer que la fonction $\dfrac{\sin(x)}{4} + \cos(10x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Même question pour la fonction $\dfrac{\cos(x) + 4\sin(x)}{1 + \mathrm{e}^x}$.

Exercice 6. Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + 5x - 7}{3x^3 - 2x^2 + 5}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{2x^3 + x - 4}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^4 + 3x^2 + x}{2x^3 + x^2 + 3x}$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to0} x^2 \ln(x^4)$.

e) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\ln(1 + 2x + x^2)}{x}$.

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x)\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 7. Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{1 - x^3}{1 - x^7}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x^2 - 4}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x + 3x^2}$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin^4(x)}{x^3 \ln(1 + x)}$.

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x$.

f) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}$.

g) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{1}{x - 1} - \frac{3}{x^3 - 1}$.

h) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{4\cos^2 x - 3}$.

i) $\displaystyle\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$.

j) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{(1 - e^x)\sin x}{x^2 + x^3}$.

k) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 \frac{x}{2}}$.

l) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin(x^4)}{x(\tan x - \sin x)}$.

m) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\pi}}{\sin x}$.

n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

o) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\mathrm{e}^{2x} + x^2)}{x}$.

Exercice 8. Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) Limite éventuelle en 1, $+\infty$ et $-\infty$ de $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$.

b) Limite éventuelle en 0, $+\infty$ et $-\infty$ de $x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$.

c) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Limite éventuelle en 0 de $\dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x^m}$ (on discutera selon les valeurs de m).

d) Limite éventuelle en π de $\dfrac{\sin x}{x(x-\pi)}$.

e) Soit $m \in \mathbb{R}$. Limite éventuelle en 0 de $(1+mx)^{\frac{1}{x}}$ (on discutera selon les valeurs de m).

Exercice 9. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est *lipschitzienne* de rapport M si et seulement si elle vérifie :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x)-f(y)| \leq M|x-y|.$$

a) Montrer que la fonction g définie par $g(x) = 3x+4$ est lipschitzienne de rapport à préciser.

b) Soit f une fonction lipschitzienne de rapport M. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M|x| + |f(0)|.$$

En déduire que la fonction $\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{E(1/x)+x}{E(1/x)-x}$, où E représente la fonction partie entière.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Ecrire à l'aide de symboles logiques “la fonction f n'admet pas de limite finie en $+\infty$.

b) Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin(x)$. Déterminer deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ qui tendent vers $+\infty$ et telles que $f(u_n) \to 0$ et $f(v_n) \to 1$. En déduire que f n'admet pas de limite en $+\infty$.

c) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *périodique* s'il existe $T > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $f(x+T) = f(x)$. Quelles sont les fonctions périodiques qui ont une limite en $+\infty$?

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty$.

a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ il existe $x_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \geq x_\alpha,\ f(x) \geq |\alpha x| + |x|.$$

b) En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) - \alpha x = +\infty$.

Exercice 13. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et il existe $l \in \mathbb{R}^*$ tel que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

a) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

b) Montrer que si $l > 0$ on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.