L1 MPI
2012/2013
S1 Mathématiques

TD n^{o}5: Continuité et fonctions réciproques

Exercice 1. Soit $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction partie entière.
a) En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction E est-elle continue ?
b) En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction E est-continue à droite ?
c) Pour chacun des intervalles I suivants, on considère maintenant la fonction E définie sur I. Est-elle continue sur cet intervalle ?

$$I = [0,1], \quad I =]0,1[, \quad I = [0,1[, \quad I =]0,1].$$

Exercice 2.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3x}-1}{x} & \text{si} \quad x < 0, \\ \dfrac{x^2+2x+3}{x^3+1} & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$

La fonction f est-elle continue en 0 ?

b) Soit $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-1} & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ 2 & \text{si} \quad x = 1, \\ \dfrac{x+1}{3x-1} & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$

La fonction g est-elle continue en 1 ?

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = a$ et $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$.
a) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
b) Montrer que f n'est pas continue en 0. Indication : considérer la suite de terme général $x_n = \dfrac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$.
On considère maintenant la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(0) = a$ et $g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$.
c) Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^*$.
d) Pour quelle(s) valeur(s) de a est-elle continue en 0?

Exercice 4. On note $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction partie entière.
a) Sur quel ensemble la fonction E est-elle continue?
b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = xE(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$. Sur quel ensemble la fonction f est-elle continue?

Exercice 5.
a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout couple de réels (x,y) appartenant à $[a,+\infty[$, on a

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leq \frac{1}{a^2}|x-y|.$$

b) En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que:

$$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon.$$

c) Écrire une formulation de la propriété précédente en termes de limite.
d) En déduire que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 6. Pour quelle(s) valeur(s) du réel a la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{x} & \text{si} \quad x < 0, \\ \\ \dfrac{\ln(1+3x)}{2x} & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

est-elle prolongeable par continuité en 0? On précisera alors la valeur du prolongement de f en 0.

Exercice 7. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f?

b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 8. Soit $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{1 - \cos(\sin x)}$.

a) Sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est-elle définie, continue ?

b) En quels points peut-on prolonger f par continuité ?

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La fonction f est dite *uniformément continue sur* $\mathbb{R}$ si elle vérifie la propriété (P) suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

a) Quelle est la différence entre cette définition et celle de "f est continue sur $\mathbb{R}$"?

b) Donner la négation de (P).

c) Montrer que la fonction définie par $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (on pourra choisir dans la négation de (P) : $\varepsilon = 1$, $x = \frac{1}{\alpha}$ et $y = x + \frac{\alpha}{2}$).

d) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$. En déduire que la fonction sinus est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq |x|$.

a) Interpréter graphiquement cette condition.

b) Montrer que f est continue en 0.

c) La fonction $x \to x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 11. Étudier les suites définies par récurrence suivantes.

a) $u_{n+1} = u_n^2 + 2$, $u_0 \in \mathbb{R}$.

b) $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$, $u_0 = 0$.

c) $u_{n+1} = \sin u_n$, $u_0 \in \mathbb{R}$. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|\sin(x)| \leq |x|$.

d) $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$, $u_0 > 0$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x)f(y).$$

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

b) On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$. Montrer que $f = 0$.

c) On suppose que f n'est pas la fonction nulle.

  i) Justifier que $f(1) > 0$.

  ii) Montrer que $f(x) = (f(1))^x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$ (on pourra commencer par montrer le résultat pour $x \in \mathbb{N}$ puis $x \in \mathbb{Z}$).

  iii) Montrer que $f(x) = (f(1))^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (autrement dit f est une fonction puissance).

d) Où a-t-on utilisé l'hypothèse "f continue"?

Exercice 13.

a) Montrer que l'équation $x^{17} = x^{11} + 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que tout polynôme P réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 14. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$, i.e. pour tout $x \in [0, 1]$ on a $f(x) \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 15. Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et p et q deux réels strictement positifs. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que
$$pf(0) + qf(1) = (p+q)f(x_0).$$

Exercice 16. Soient f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0,1]$. On suppose que $f(0) = g(1) = 0$ et $g(0) = f(1) = 1$. Montrer que
$$\forall \lambda > 0,\ \exists x \in [0,1],\ f(x) = \lambda g(x).$$

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On considère les propriétés suivantes
$$P1\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) > 0 \text{ ou } f(x) < 0) \quad \text{et} \quad P2\ :\ (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0)\,.$$

a) Les propriétés $P1$ et $P2$ sont-elles équivalentes ?

b) Donner une CNS pour que $P1$ soit vraie.

c) Donner une CS simple pour que $P1$ et $P2$ soient équivalentes.

Exercice 18.

a) Donner un exemple d'une fonction f sur $[0,1]$, non constante, telle que $\forall x \in [0,1]$, $(f(x))^2 = 1$.

b) Soit f continue sur sur $[0,1]$ telle que $\forall x \in [0,1]$, $(f(x))^2 = 1$. Montrer que f est constante.

c) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions continues sur I telles que pour tout $x \in I$, $(f(x))^2 = (g(x))^2 \neq 0$. Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = f(|x|) > 0$. Montrer que f est paire.

Exercice 20. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$. Pour chacune des affirmations suivantes dire si elle est vraie ou fausse. (Justifier la réponse.)

a) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f prend une fois et une seule fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

b) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f prend au moins une fois tout valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

c) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est strictement monotone alors f prend une fois et une seule fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

d) Si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ est continue et bornée alors f atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.

e) Si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ est continue et bornée alors f atteint sa borne supérieure ou sa borne inférieure.

f) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et ne s'annule pas alors $\frac{1}{f}$ est bornée.

g) L'image du segment $[a,b]$ par une fonction continue est un segment $[c,d]$.

h) L'image de l'intervalle $]a,b[$ par une fonction continue est un intervalle $]c,d[$.

i) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si l'image de $[a,b]$ par f est un segment alors f est continue.

j) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si l'image de $[a,b]$ par f n'est pas un segment alors f n'est pas continue.

k) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et croissante alors f est injective.

l) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est telle que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que f soit décroissante sur $[M, +\infty[$.

Exercice 21. Donner un exemple de fonction f continue et définie sur $[0,1[$ telle que

a) f ne soit pas majorée.

b) f ne soit pas minorée.

c) f soit majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure.

d) f soit minorée mais n'atteint pas sa borne inférieure.

Exercice 22. Donner un exemple de fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

a) f ne soit pas majorée.

b) f ne soit pas minorée.

c) f soit majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure.

d) f soit minorée mais n'atteint pas sa borne inférieure.

Exercice 23.

a) Démontrer que la fonction réciproque d'une fonction impaire est impaire.

b) Pourquoi ne peut-on pas parler de la fonction réciproque d'une fonction paire ?

Exercice 24. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$. Montrer que f est continue, bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$ et déterminer sa réciproque f^{-1} (on précisera bien l'ensemble de définition de f^{-1}).

Exercice 25. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{2x+2} & \text{si} \quad x < -1, \\ 2x+3 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0, \\ x^2+2x+3 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

a) Tracer son graphe.
b) Montrer que f est continue et strictement croissante.
c) Donner les formules définissant sa fonction réciproque f^{-1} (en précisant bien son ensemble de définition) et tracer le graphe de f^{-1}.

Exercice 26. Soient f et g deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$. On veut montrer qu'il existe un point c dans $[0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$. On raisonne par l'absurde. On suppose que le résultat est faux.
a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\underbrace{(\forall x \in [0,1],\ f(x) - g(x) > \alpha)}_{(1)} \quad \text{ou} \quad \underbrace{(\forall x \in [0,1],\ g(x) - f(x) > \alpha)}_{(2)}.$$

On note $f_n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois) et $g_n = g \circ g \circ \cdots \circ g$.
b) Montrer que les fonctions f_n et g_n sont continues sur $[0,1]$.
c) Dans le cas (1), montrer que $\forall n > 0$, $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) - g_n(x) > n\alpha$. En déduire que (1) ne peut pas arriver.
d) Montrer de la même manière que (2) ne peut pas arriver. Conclure.

Exercice 27. Simplifier les expressions suivantes
a) $\cos(2\arccos(x))$
b) $\cos(2\arcsin(x))$
c) $\sin(2\arccos(x))$
d) $\cos(2\arctan(x))$
e) $\sin(2\arctan(x))$
f) $\tan(2\arcsin(x))$

Exercice 28. Montrer les formules suivantes:
a) $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi$.
b) $\arcsin(4/5) = 2\arctan(1/2)$.

Exercice 29. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 30. Montrer que
a) La fonction sinh est continue sur $\mathbb{R}$, impaire, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
b) La fonction cosh est continue sur $\mathbb{R}$, paire, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $[1,+\infty[$.
c) La fonction tanh est continue sur $\mathbb{R}$, impaire, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.

Exercice 31. Montrer que
a) $\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$.
b) $\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b)$.
c) $\cosh(2a) = \cosh^2(a) + \sinh^2(a) = \frac{1+\tanh^2(a)}{1-\tanh^2(a)}$.
d) $\sinh(2a) = 2\sinh(a)\cosh(a) = \frac{2\tanh(a)}{1-\tanh^2(a)}$.
e) $\tanh(a+b) = \frac{\tanh(a)+\tanh(b)}{1+\tanh(a)\tanh(b)}$.
f) $\tanh(2a) = \frac{2\tanh(a)}{1+\tanh^2(a)}$.
g) $\cosh(a) + \cosh(b) = 2\cosh(\frac{a+b}{2})\cosh(\frac{a-b}{2})$.
h) $\cosh(a) - \cosh(b) = 2\sinh(\frac{a+b}{2})\sinh(\frac{a-b}{2})$
i) $\sinh(a) + \sinh(b) = 2\sinh(\frac{a+b}{2})\cosh(\frac{a-b}{2})$
j) $\sinh(a) - \sinh(b) = 2\sinh(\frac{a-b}{2})\cosh(\frac{a+b}{2})$.

Exercice 32. Montrer que
a) Pour tout $x \in [1,+\infty[$, $\mathrm{Argcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.
b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Argsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
c) Pour tout $x \in]-1,1[$, $\mathrm{Argtanh}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.