L1 MPI
2012/2013
S1 Mathématiques

TD n^{o}6: Dérivabilité

Exercice 1. En utilisant la définition, calculer la dérivée des fonctions suivantes.
a) $f(x) = ax + b$ en tout $x_0 \in \mathbb{R}$.
b) $f(x) = \sqrt{x}$ en tout $x_0 > 0$. f est-elle dérivable en 0?

Exercice 2. Montrer que les fonctions sinh, cosh et tanh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leur dérivée.

Exercice 3. On rappelle que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.
a) En utilisant la définition, montrer que les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leur dérivée.
b) Montrer que la fonction tan est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.

Exercice 4. Calculer les dérivées des fonctions suivantes

a) $f(x) = \sin(\cos(x))$.
b) $g(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$.
c) $h(x) = \frac{1}{1+\tan(x)}$.
d) $i(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$.
e) $j(x) = \sin(x^5 + 2x)$.
f) $k(x) = \sin\left(\frac{x^2}{\cos(x^2)}\right)$.

Exercice 5. Calculer f' en fonction de g' dans les cas suivants
a) $f(x) = g(x + g(x))$.
b) $f(e^{x+3}) = g(x^3)$.

Exercice 6. Étudier et calculer si elle existe la dérivée en 0 des fonctions f et g définies par

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Exercice 7. Soient g et h deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, dérivables en 0 et telles que $g(0) = h(0)$. On définit la fonction f par

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x < 0, \\ h(x) & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur g et h pour que f soit dérivable en 0 (Indication: deviner la solution en raisonnant graphiquement).

Exercice 8. Soit $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$.
a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est dérivable.
b) Calculer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.
c) Montrer que f^{-1} est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $(f^{-1})''(0)$.

Exercice 9. Montrer que
a) La fonction arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et que $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
b) La fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et que $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
c) La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
d) pour tout $x \in [-1,1]$, $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.
e) Simplifier, pour $x \neq 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 10. Montrer que

a) La fonction Argcosh est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\mathrm{Argcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

b) La fonction Argsinh est dérivable sur$\mathbb{R}$ et $\mathrm{Argsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

c) La fonction Argtanh est dérivable sur $]-1,1[$ et $\mathrm{Argtanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Exercice 11. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (justifier).

a) Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0. La réciproque?

b) Si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 alors f est dérivable en x_0.

c) Si f est dérivable sur $]0,2[$ et $f'(1) = 0$ alors f admet un extremum local en 1.

d) La dérivée de $f(x) = \cos(2x)$ est $f'(x) = -\sin(2x)$.

e) On peut appliquer le théorème de Rolle à $f(x) = |x|$ sur $[-1,1]$. Même question avec $g(x) = 5x^2+3$ sur $[0,2]$.

Exercice 12. Les énoncés suivants sont ils corrects ? Si la réponse est non, les corriger.

a) Soit f dérivable sur $[a,b]$ continue sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

b) Soit f continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

c) Interprétation graphique du théorème des accroissements finis: soit f continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que la courbe représentative de f admette au point $C = (c, f(c))$ une tangente qui passe par les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

Exercice 13. En utilisant des théorèmes du cours, montrer que

a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.

b) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)a^n < \dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} < (n+1)b^n$.

c) Si $a_0, \ldots, a_n$ vérifient $a_0 + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ alors $\exists x \in]0,1[$ tel que $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$.

Indication : considérer la fonction f définie par $f(x) = a_0 x + a_1 \dfrac{x^2}{2} + \cdots + a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Exercice 14. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = -1$. Montrer que

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = -1$.

b) $\exists x_1 \in]0,1[,\ f(x_1) < 0$.

c) $\exists x_2 \in]0,1[,\ f(x_2) = 0$.

d) $\exists x_3 \in]0,1[,\ f'(x_3) = 0$.

Exercice 15. Soit f continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$ et telle que $f(0) = 0$ et f' soit croissante.

a) Montrer que $\forall x > 0,\ f(x) \le x f'(x)$.

b) Soit $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Montrer que g est croissante.

Exercice 16.

a) Montrer que l'on a $\forall x \in]0,\pi[,\ x\cos(x) - \sin(x) < 0$.

b) Étudier le sens de variation de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ sur l'intervalle $]0,\pi]$.

c) Soient a et b des nombres réels tels que $0 < a < b < \pi$. Montrer que l'on a $\dfrac{a}{b} < \dfrac{\sin(a)}{\sin(b)}$.

Exercice 17. Soit p un entier positif.

a) Montrer que la fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{(1+x)^p}{1+x^p}$ a pour maximum 2^{p-1}.

b) Soient a et b des nombres réels positifs. Montrer que $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$.

Exercice 18. Soit f une fonction dérivable sur $]a,b[$ avec $0 < a < b$. On suppose de plus que f est continue sur $[a,b]$ et que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe une tangente à la courbe représentative de f qui passe par l'origine. Indication : on pourra introduire la fonction g définie sur $[a,b]$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

Exercice 19. Soit P un polynôme réel, ayant n racines réelles distinctes. Montrer que P' en a au moins $n-1$.

Exercice 20. Calculer, à l'aide du théorème des accroissements finis :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}\right).$$

Exercice 21.

a) Montrer qu'il existe un unique $l \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(l) = l$. Montrer que $0 \leq l \leq 1$.
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

b) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

c) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - l| \leq (\sin(1))|u_n - l|$.

d) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leq (sin(1))^n |u_0 - l|$. En déduire que $(u_n)_n$ converge vers l.

Exercice 22. Soit f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ où $P_n(x)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de degré n. Indication : raisonner par récurrence.

Exercice 23. Soit $g_1(x)$ la dérivée d'ordre 1 de $x^2 - 1$, $g_2(x)$ la dérivée d'ordre 2 de $(x^2-1)^2$, et pour tout entier n soit $g_n(x)$ la dérivée d'ordre n de $(x^2-1)^n$.

a) Calculer $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour $0 < p \leq n$, $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$.

b) Calculer la dérivée d'ordre p de $(x-1)^n$ puis celle de $(x+1)^n$.

c) En déduire la dérivée d'ordre p de $(x-1)^n$ en 1 et celle de $(x+1)^n$ en -1.

d) Calculer les dérivées d'ordre p en 1 et -1 de $(x^2-1)^n$, $0 \leq p \leq n$.

e) Montrer que si $n \neq 0$, $g_n(x)$ s'annule au moins n fois dans $]-1,1[$. (Indication : utiliser d) et Rolle.)

Exercice 24. Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Trouver la limite $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+2h)+f(a)-2f(a+h)}{h^2}$.

Exercice 25. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\sin(x) - x\cos(x) - 2x}{x^5}$.

Exercice 26. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\exists C > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^2.$$

Montrer que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, f est dérivable sur en x_0 et $f'(x_0) = 0$. Que peut-ton en déduire sur f?

Exercice 27. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, et $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ si $x > 0$.

a) Montrer que f est infiniment dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

b) Vérifier que f est continue en 0.

c) Montrer que f est dérivable en 0.

d) Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

e) Montrer que $f^{(n)}(x) = P_n(x)x^{-m_n}\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ si $x > 0$ où $m_n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n(x)$ est un polynôme à coefficients réels.

f) En déduire que f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

g) Déterminer une fonction non identiquement nulle infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et nulle à l'extérieur de $[0,1]$.

Exercice 28. Soit $f(x) = |x|$. La fonction f est-elle C^∞ sur $]-\infty, 0[$? sur $]0,+\infty[$? sur $\mathbb{R}$? Est-elle de classe C^3 sur $[-1,0]$? sur $[0,1]$? sur $[-1,1]$?

Exercice 29. Pour une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, on considère la propriété suivante

$$(P): \qquad \forall a, b \in \mathbb{R},\ f(b) - f(a) = (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

a) Soient $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$ et f définie par $f(x) = Ax^2 + Bx + C$. Montrer que f vérifie (P).

b) Soit f de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ vérifiant (P). Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 pour f entre a et $\frac{a+b}{2}$, puis entre b et $\frac{a+b}{2}$. En déduire que pour tout $d \in \mathbb{R}$ on a $f^{(3)}(d) = 0$. En déduire que f est un polynôme de degré au plus 2.

c) Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant (P). Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{f(x+1)-f(x-1)}{2}$. En déduire que f est de classe C^3. Conclure.

Exercice 30. Déterminer la dérivée n-ème de la fonction $f(x) = x^n(1+x)^n$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 31. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan(x) + \arctan(2x)$.

a) Étudier f et tracer sa courbe représentative.

b) Montrer que f est une bijection (de quel ensemble dans quel ensemble?) et faire l'étude de la fonction réciproque. Tracer sa courbe représentative.

Exercice 32. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin(4x^3 - 3x)$.

a) Déterminer le domaine de définition de f. Étudier la continuité de f.

b) Étudier sa dérivabilité.

c) Montrer que $f(x) = -3\arcsin(x)$ si $x \in [-1/2, 1/2]$.

d) Calculer $f(x)$ pour $x \in [1/2, 1]$.

Exercice 33. Comparer les fonctions définies par $f(x) = \arccos(x)$ et $g(x) = \arcsin(\sqrt{1-x2})$.

Exercice 34. Calculer $f(x) = \arcsin(\cos(2x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 35. Soit f la fontion définie par $f(x) = \ln(\tanh(x/2))$.

a) Faire l'étude de f (on précisera bien son ensemble de définition).

b) Montrer que f est bijective (de quel ensemble vers quel ensemble?) et déterminer f^{-1}.