Université de Cergy-Pontoise
Département de Mathématiques
L1 MIPI - S2
2015/2016

Cours de Mathématiques : Polynômes et Suites

-

Polycopié d'Exercices

Chapitre 1 : Nombres complexes

Exercice 1.
a) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $(1+3i)(2-5i)$.
b) Montrer que $A=(1+2i)(2-3i)(2+i)(3-2i)$ est réel.
c) On donne $z=3-2i$. Déterminer les parties réelle et imaginaire de l'inverse de z.
d) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $(1+2i)z-3+5i=0$, $2z+3\overline{z}=5$, $\overline{z}^2+2|z|^2-3=0$.

Exercice 2.
a) Calculer le module et un argument de $1+i\sqrt{3}$, $2i(1+i)(1+i\sqrt{3})$, $\dfrac{-3\sqrt{3}-3i}{1+i}$.
b) Montrer que $(-1+i)^{10}=-32i$.
c) Calculer le module et un argument de $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$. En déduire z^6.
d) Montrer que $|z|=1$ si et seulement si $\overline{z}=1/z$.

Exercice 3. Soit $z_1=1+i$ et $z_2=\sqrt{3}-i$.
a) Calculer les modules et arguments de z_1 et z_2.
b) Donner la forme algébrique et trigonométrique de z_1z_2.
c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 4.
a) Exprimer $\cos(2\theta)$, $\sin(2\theta)$, $\cos(3\theta)$ et $\sin(6\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
b) Linéariser $\cos^2\theta$, $\sin^3\theta$, $\sin^4\theta$ et $(\sin^2\theta)(cos^3\theta)$.

Exercice 5.
a) Calculer les racines carrées de -7 et $8i$.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes
  i) $z^2-2z+5=0$.
  ii) $z^2+(4-6i)z-5-14i=0$.

Exercice 6. (Annales 2015) On considère les nombres $z_1=2+i2\sqrt{3}$ et $z_2=2-i2\sqrt{3}$.
a) Déterminer les racines carrées complexes de z_1 et de z_2. On les cherchera d'abord sous forme exponentielle puis on les donnera sous forme algébrique.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-4z+16=0$.

Exercice 7. Calculer les racines sixièmes de l'unité.

Exercice 8. Calculer les racines 4-ièmes de -1 et les racines 5-ièmes de $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

Exercice 9. Soient $\phi\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\phi)z + 1 = 0$.
b) En déduire les solutions de l'équation $z^{2n} - 2\cos(\phi)z^n + 1 = 0$.

Exercice 10.
a) Montrer que l'équation

$$z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12) = 0, \qquad (E)$$

admet une solution réelle et une solution imaginaire pur, puis résoudre (E).
b) Montrer que les points dont les affixes sont les solutions de (E) sont alignés.

Exercice 11. On note $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$.
a) Montrer que les racines troisième de l'unité sont 1, j et j^2.
b) Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
Soient A, B et C trois points distincts du plan d'affixe respective a, b et c.
c) Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a} \in \left\{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}, \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}$.
d) En déduire que ABC est équilatéral si et seulement si a, b et c vérifient

$$a + bj + cj^2 = 0 \quad \text{ou} \quad a + bj^2 + cj = 0.$$

Exercice 12. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$i\mathrm{e}^{i\theta},\ 1 + \mathrm{e}^{i\theta},\ \mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{i\alpha}, \quad (\theta,\, \alpha \in [0, 2\pi]).$$

Exercice 13. Vérifier que pour tous complexes z, z' on a
a) $z\overline{z'} + \overline{z}z' = 2\mathrm{Re}(z\overline{z'})$.
b) $|z| \geq |\mathrm{Re}(z)| \geq \mathrm{Re}(z)$ et $|z| \geq |\mathrm{Im}(z)| \geq \mathrm{Im}(z)$.

Exercice 14. Soit ω une racine n-ième de l'unité différente de 1 et $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k$.

a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k$.

b) En déduire que $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}k\omega^k$.

c) Calculer ωS et en déduire la valeur de S.

Exercice 15.
a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^5 - 1 = 0$ et représenter les solutions dans le plan complexe.
On pose $u = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}$.

b) Montrer que $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = 0$.

c) Vérifier que $u + u^4 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $u^2 + u^3 = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

d) En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$, puis calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Exercice 16. Représenter dans le plan complexe les ensembles suivants :

a) $A_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 3\}$.

b) $A_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \arg(z) = \pi/4 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

c) $A_3 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z - \overline{z} = 2\}$.

d) $A_4 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - 1| = |z - i|\}$.

e) $A_5 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - 1 + 2i| = 3\}$.

Exercice 17.

a) Calculer les racines carrées de $-2i$, $5 - 12i$ et $-3 + 4i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$.

Exercice 18.

a) Quels sont les nombres complexes dont le carré est égal au conjugué.

b) Déterminer les nombres complexes non nuls z tel que z, $1/z$ et $1 - z$ aient le même module.

Chapitre 2 : Polynômes à coefficients réels ou complexes

Exercice 1. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que si A divise B et B divise A alors il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que $A = kB$. De tels polynômes sont dits *associés*. Indication : utiliser le degré.

Exercice 2. Effectuer les divisions euclidiennes de P par Q suivantes.

a) $P = X^3 + 3X^2 + 2X - 1$ et $Q = X^2 - X - 1$.

b) $P = 3X^5 + 4X^2 + 1$ et $Q = X^2 + 2X + 3$.

c) $P = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ et $Q = X^3 + X + 2$.

d) $P = X^4 - X^3 + X - 2$ et $Q = X^2 - 2X + 4$.

Exercice 3. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le reste de la division euclidienne de $P = X^6 - mX^4 + (m^2 + 4)X^2 - 2$ par $Q = X - 1$ est-il $R = 5$?

Exercice 4. Exprimer le reste de la division euclidienne d'un polynôme P par $X-a$, puis par $(X-a)^2$.

Exercice 5. Soient $a \neq b$ deux réels. Montrer que le reste de la division d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ par $(X-a)(X-b)$ est $R = \dfrac{P(b)(X-a)+P(a)(X-b)}{b-a}$. Indication : quel peut-être le degré de ce reste ?

Exercice 6.

a) Montrer que si Q divise P et si a est racine de Q alors a est racine de P.

b) Montrer que si $a_1, \dots, a_k$ sont des racines distinctes de P alors $(X-a_1)\cdots(X-a_k)|P$.

Exercice 7. Soit $n \geq 1$. Montrer que $Q = (X-1)^2$ divise $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et déterminer le quotient de P par Q.

Exercice 8. Montrer que -1 est racine simple de $P = (X-1)^4 - (X+3)^4$. Même question pour $Q = (X-1)^{2n} - (X+3)^{2n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9.

a) À quelle condition sur les paramètres $a, b, c \in \mathbb{C}$ le polynôme $P = aX^2 + bX + c$ a-t-il une racine multiple dans $\mathbb{C}$?

b) Même question pour $Q = X^3 + pX + q$ avec $p, q \in \mathbb{C}$.

Exercice 10.

a) Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ et $A = BQ + R$ la division euclidienne de A par B. Montrer que P est un diviseur commun de A et B si et seulement si c'est un diviseur commun de B et R.
Application : on veut montrer que $P = 36X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ possède deux racines doubles et les déterminer.

b) Montrer que si a et b sont racines doubles de P alors $(X-a)(X-b)$ divise P et P'.

c) Effectuer la division euclidienne de P par P'. En déduire que les seules valeurs possibles de a et b sont $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{2}$.

d) Conclure.

Exercice 11. Montrer que, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $P = 1 + \dfrac{X}{1!} + \dfrac{X^2}{2!} + \cdots + \dfrac{X^n}{n!}$ possède n racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

Exercice 12. Factoriser dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ les polynômes

$$X^3 + 1, \quad X^4 + 1, \quad X^6 + 1, \quad X^8 + X^4 + 1.$$

Exercice 13. (Annales 2015) Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on considère le polynôme $P(X) = X^4 + 3X^3 + aX^2 + 3X + b$.

a) A quelle condition sur (a, b) le nombre -1 est-il racine du polynôme P ?

b) Calculer P'. Montrer que -1 est racine double de P si et seulement si $a = 4$ et $b = 1$.
c) En déduire la factorisation en produits de facteurs irréductibles de $X^4+3X^3+4X^2+3X+1$ dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$. Indication : on pourra effectuer la division euclidienne de $X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3X + 1$ par $(X + 1)^2 = X^2 + 2X + 1$.

Exercice 14. Effectuer la division euclidienne de $X^n + X^{n-1} + 1$ par $X^2 + X + 1$.
a) Pour $n = 2, 3, 4, 5, 6$.
b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

Exercice 15. On souhaite déterminer les polynômes P tels que $(X+3)P(X) = XP(X+1)$.
a) Montrer que si $a \neq 0$ est racine de P alors $a+1$ aussi, et que si $a \neq -2$ alors $a-1$ aussi.
b) En déduire les racines de P, puis P. Indication : que peut-on dire a priori sur le nombre de racines d'un polynôme ?

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Décomposer le polynôme $X^{2n} - 2\cos(\alpha)X^n + 1$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Chapitre 3 : Suites de nombres réels

Exercice 1. Écrire à l'aide de quantificateurs les propriétés suivantes :
a) La suite u est positive à partir d'un certain rang.
b) La suite u est constante à partir d'un certain rang. Comment s'appelle une telle suite ?
c) La suite u est croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 2. Une suite arithmétique de raison r est-elle croissante ? décroissante ? constante ? Mêmes questions pour une suite géométrique de raison r.

Exercice 3. Soient u et v deux suites bornées et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $u + v$ et λu sont bornées.

Exercice 4. Montrer qu'une suite u est majorée, respectivement minorée, si et seulement si elle est majorée, respectivement minorée, à partir d'un certain rang.

Exercice 5. Une suite arithmétique de raison r est-elle majorée ? minorée ? bornée ? Mêmes questions pour une suite géométrique de raison r.

Exercice 6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$, et $(u_n)_n$ la suite définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = au_n + b$, i.e. une suite arithmético-géométrique. On va montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = a^n u_0 + b \times \frac{1-a^n}{1-a}. \tag{1}$$

Méthode 1.
a) Démontrer (1) en utilisant un raisonnement par récurrence.
Méthode 2.
b) Déterminer deux nombres l et q (que l'on exprimera à l'aide de a et b) tels que pour tout n on ait $u_{n+1} - l = q(u_n - l)$.
c) Que peut-on dire de la suite $v_n = u_n - l$?
d) Exprimer v_n en fonction de n et retrouver (1).

Exercice 7. Donner un exemple de suite :
a) Croissante et majorée.
b) Ni croissante, ni décroissante.
c) Ni majorée, ni minorée.
d) Croissante, ni strictement croissante à partir d'un certain rang ni stationnaire.

Exercice 8. Écrire la définition de "la suite u est divergente".

Exercice 9. Montrer, en utilisant la définition, que $\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{2n+3} = \frac{3}{2}$.

Exercice 10. Montrer en utilisant la définition que si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et $u_n \to a$, alors $a \geq 0$ et $\sqrt{u_n} \to \sqrt{a}$.

Exercice 11. Montrer en utilisant la définition que $(\sqrt{n})_n$ tend vers $+\infty$.

Exercice 12. Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$ et si $u_n \to 0$ alors $\frac{1}{u_n} \to +\infty$.

Exercice 13. Étudier la convergence des suites de termes généraux suivantes.

a) $\dfrac{n}{n+1}$
b) $\dfrac{1}{n^2+1}$
c) $\dfrac{n}{n^2+1}$
d) $\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$,
e) $n - \sqrt{n^2-n}$
f) $\sqrt{n(n+1)} - n$,
g) $\dfrac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$
h) $\dfrac{E(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$,
i) $\dfrac{\cos(n\theta)}{n}$,
j) ne^{-n},
k) $\dfrac{2^n - 3^{n+1}}{5^{2n}}$,
l) $\ln\left(\dfrac{1+n}{n^2}\right)$,
m) $\dfrac{n^2 + (-1)^n\sqrt{n}}{2n+1}$.
n) $(-1)^n \dfrac{n+1}{n}$
o) $\sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$
p) $\dfrac{n}{2}\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

Exercice 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

Montrer que la suite u est convergente et calculer sa limite. (Indication : trouver un encadrement et utiliser le théorème des gendarmes.)

Exercice 15. Soient u_0 et v_0 deux réels tels que $u_0 < v_0$. On définit les suites u et v par $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$. En déduire que ces deux suites convergent et ont la même limite.

Exercice 16. Soient a et b les suites définies par $0 < a_0 < b_0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < a_n < b_n$.

b) Montrer que a est croissante et b est décroissante.

c) En déduire que les suites a et b convergent.

d) Montrer que les suites a et b ont même limite.

Exercice 17. Soient u_0 et v_0 deux nombres tels que $0 < u_0 < v_0$. On définit les suites u et v par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_n < v_n$. On pourra raisonner par récurrence.

b) Montrer que la suite u est croissante et que la suite v est décroissante.

c) En déduire que les suites u et v convergent. On note ℓ la limite de u et ℓ' celle de v.

d) Montrer que $\ell = \ell'$.

e) Montrer que la suite $(u_n v_n)_n$ est constante. En déduire la valeur de ℓ en fonction de u_0 et v_0.

f) On prend $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$.

i) Calculer v_1, u_1, v_2 puis u_2 sous forme de fractions irréductibles. Que vaut $v_2 - u_2$?

ii) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près. Justifier votre réponse.

Exercice 18. Pour chacun des ensembles suivants : dire s'il admet une borne supérieure, une borne inférieure, un plus grand élément, un plus petit élément, et si oui les donner.

a) $A =]-1, 1]$.

b) $B = [-1, 0] \cup]1, 2]$.

c) $C =]6, 22[\cup \{2\} \cup [100, +\infty[$.

d) $D = \{\sin(x),\ x \in]0, \pi[\}$.

e) $E = \left\{\sin\left(\frac{1}{x}\right),\ x \in]0, \pi[\right\}$.

f) $F = \{(-1)^n + \frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 19. Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$, on définit $A + B = \{a + b \,|\, a \in A,\, b \in B\}$.

a) Soient $A = [0, 1[$ et $B = \{1\}$. Déterminer $A \cup B$ et $A + B$.

b) On suppose que A et B admettent chacun un plus grand élément. Montrer que $A + B$ admet un plus grand élément et que $\max(A + B) = \max A + \max B$.

On suppose que A et B sont majorées.

c) Montrer que $A \cup B$ et $A + B$ sont majorées.

d) Montrer que $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$ puis que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

e) Déterminer $\sup(A \cup B)$.

f) Montrer que $\sup\{\sin(x) + \cos(x) \,|\, x \in \mathbb{R}\} \neq \sup\{\sin(x) \,|\, x \in \mathbb{R}\} + \sup\{\cos(x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 20. Soit $A = \left\{ \dfrac{1 + \cos n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

a) Montrer que la suite de terme général $\dfrac{1+\cos n}{n}$ converge et donner sa limite ?
b) Montrer que A admet un maximum.
c) Calculer $\inf A$. A admet-il un minimum ?

Exercice 21. Pour chacune des affirmations suivantes dire si elle est vraie ou fausse. (Justifier la réponse.)
a) Si pour tout $p \in \mathbb{N}$, u_{2p} est positif et u_{2p+1} est négatif, alors la suite u diverge.
b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$ alors la suite u converge.
c) Si la suite $(nu_n)_n$ est bornée alors la suite u converge.
d) Si u est croissante, alors u tend vers $+\infty$.
e) Une suite non majorée tend vers $+\infty$.
f) Si $u_n \to \frac{1}{2}$ alors la suite u est positive partir d'un certain rang.
g) Toute suite monotone est convergente.
h) Toute suite croissante et majorée est bornée.
i) Si la suite u est décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \geq 0$, alors $u_n \to 0$.
j) Une suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
k) Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n$ et $v_n \to 0$ alors $u_n \to 0$.
l) Si la suite $u_n \to l$ alors $u_{n+1} - u_n \to 0$.
m) Si la suite $(|u_n|)_n$ converge alors la suite $(u_n)_n$ converge.
n) Si les suites u et v divergent alors la suite $u+v$ diverge.
o) Si les suites u et v divergent alors la suite uv diverge.
p) Si la suite u converge et la suite v diverge alors la suite $u+v$ diverge.
q) Si la suite u converge et la suite v diverge alors la suite uv diverge.
r) Pour toute suite v, si $u_n \to 0$ alors $u_n v_n \to 0$.
s) Si $u_n v_n \to 0$ alors soit $u_n \to 0$ soit $v_n \to 0$. (*Indication* : considérer l'exemple $u_n = 1 + (-1)^n$, $v_n = 1 - (-1)^n$.)
t) Si $u_n \to l$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ alors $l > 0$.
u) On ne modifie pas le fait qu'une suite converge (ou non) en modifiant un nombre fini de ses termes.
v) Une suite convergente dont tous les termes sont des entiers est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 22. Représenter graphiquement chacune des suites définies par récurrence ci-dessous à l'aide de la toile d'araignée.

a) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 1 + u_n^2$.
b) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{3}$.
c) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 1$.
d) $u_0 = -1,\ 1,\ 4$ et $u_{n+1} = u_n - \dfrac{u_n^2}{4}$.

Exercice 23. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 2 - \frac{2}{x+1}$. L'objectif est d'étudier le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$, et où $u_0 \in [0, +\infty[$ est donné.

a) Etudier rapidement la fonction f et tracer son graphe.

b) Déterminer les points fixes de f.

c) Représenter à l'aide d'une toile d'araignée les 4 premiers termes de la suite pour les valeurs de u_0 suivantes : $1/4$, $1/2$, 2 et 5. Conjecturer le comportement de la suite $(u_n)_n$.

d) Etudier précisément la suite $(u_n)_n$ dans les cas $u_0 = 0$ et $u_0 = 1$.

e) On suppose ici que $u_0 \in]0, 1[$.

i) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.

ii) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

iii) En déduire que la suite converge et déterminer sa limite.

f) On suppose finalement que $u_0 > 1$.

i) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

ii) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

iii) En déduire que la suite converge et déterminer sa limite.

Exercice 24. On s'intéresse à l'évolution d'une population soumise à un certain mode de prédation. Celle-ci est donnée par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{500u_n^2}{40000 + u_n^2}$.

On notera f la fonction $f(x) = \dfrac{500x^2}{40000 + x^2}$.

a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Comment peut-on interpréter ce résultat ?

b) Déterminer les points fixes de f.

c) Montrer que $f(x) > x$ si et seulement si $x \in]100, 400[$.

d) Etudier rapidement la fonction f et tracer son graphe.

e) À l'aide d'une toile d'araignée conjecturer le comportement limite de la suite $(u_n)_n$ selon les valeurs de u_0. (On distinguera selon la valeur de u_0 par rapport à 100 et 400.)

On souhaite maintenant démontrer le résultat conjecturé à la question précédente.

f) Etudier les cas $u_0 = 100$ et $u_0 = 400$.

g) On suppose que $u_0 < 100$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante (on pourra utiliser la question c)), puis qu'elle converge. Quelle est sa limite ?

h) On suppose que $u_0 \in]100, 400[$.

i) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]100, 400[$.

ii) En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante, puis qu'elle converge. Quelle est sa limite ?

i) On suppose enfin que $u_0 > 400$.

i) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 400$.

ii) En déduire que la suite $(u_n)_n$ est décroissante, puis qu'elle converge. Quelle est sa limite ?

Exercice 25. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}.$$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $1 \le u_n \le 2$.
b) Déterminer $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. Étudier f et tracer son graphe.
c) Montrer que f ne possède qu'un seul point fixe ℓ que l'on déterminera.
d) Représenter graphiquement la suite u à l'aide de la toile d'araignée.
e) Montrer que pour tous $x, y > 0$ on a $f(y) - f(x) = \dfrac{y-x}{xy}$, et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_{n+1} - \ell| \le \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}|u_n - \ell|$.
f) En déduire que $u_n \to \ell$.

Exercice 26. (Annales 2015) On souhaite étudier, en fonction des valeurs de u_0, la suite définie par récurrence

$$u_{n+1} = u_n \exp\left(\frac{2-u_n}{4}\right), \qquad u_0 \ge 0,$$

où exp désigne la fonction exponentielle.
1. Etude d'une fonction.
a) Donner la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$, et vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \ge 0$.
b) Montrer que la fonction f possède exactement deux points fixes que l'on déterminera.
c) Etudier rapidement la fonction f (dérivée, sens de variation, limite en $+\infty$) et tracer son graphe.
d) Représenter à l'aide d'une toile d'araignée les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 pour chacune des valeurs de u_0 suivantes : 1, 2, 4, 5 et 8.

2. Etude de la suite $(u_n)_n$ lorsque $0 \le u_0 \le 4$.
a) Etudier la suite $(u_n)_n$ lorsque $u_0 = 0$ et lorsque $u_0 = 2$.
b) On suppose dans ce qui suit que $u_0 \neq 0$ et $u_0 \neq 2$.
- *i)* Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \le u_n \le 4$.
- *ii)* Montrer que si $0 < u_0 < 2$ la suite est strictement croissante, et que si $2 < u_0 < 4$ la suite est strictement décroissante. Indication : quel est le sens de variation de la fonction f sur $[0, 4]$.
- *iii)* En déduire que pour tout u_0 la suite converge et déterminer sa limite.

3. Etude de la suite $(u_n)_n$ lorsque $u_0 > 4$.
a) Montrer que $0 < u_1 < 4$.
b) En utilisant les résultats de la question 2. déterminer le comportement de la suite $(u_n)_n$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 27. Étudier les suites définies par récurrence suivantes.

a) $u_{n+1} = u_n^2 + 2$, $u_0 \in \mathbb{R}$.
b) $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$, $u_0 = 0$.
c) $u_{n+1} = \sin u_n$, $u_0 \in \mathbb{R}$. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|\sin(x)| \leq |x|$.
d) $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$, $u_0 > 0$.

Exercice 28. Pour chacune des suites définies par récurrence suivantes, exprimer u_n en fonction de n.
a) $u_0 = 1$, $u_1 = 5$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$.
b) $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
c) $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.

Exercice 29. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par $u_0 = v_0 = 1$ et $\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 3u_n + 2v_n, \\ v_{n+1} & = & u_n + 2v_n. \end{array}\right.$
<u>Méthode 1.</u>
a) Déterminer deux réels a et b tels que $v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n.
<u>Méthode 2.</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
c) Montrer qu'il existe une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout n on ait $X_{n+1} = AX_n$.
d) Montrer par récurrence que pour tout n on a $X_n = A^n X_0$.
e) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible puis calculer P^{-1} et $P^{-1}AP$.
f) Calculer $(P^{-1}AP)^n$ de deux façons différentes. Déterminer A^n.
g) Exprimer u_n et v_n on fonction de n.

Exercice 30. Montrer que si une suite u a ses deux suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ qui convergent et ont la même limite l alors la suite u converge vers l.

Exercice 31. Soit $(u_n)_n$ une suite telle que les suites extraites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent. Montrer que $(u_n)_n$ converge. (Indication : faire intervenir les suites extraites $(u_{6n})_n$ et $(u_{6n+3})_n$.)

Exercice 32. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, l'objectif de cet exercice est de montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$. On note $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$.
a) Montrer que, si $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. Pourquoi a-t-on supposé $x \neq 0$?
b) En déduire que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $|u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}|u_n|$.

c) Montrer que pour tout $n \geq n_0$ on a $|u_n| \leq \dfrac{2^{n_0}}{2^n}|u_{n_0}|$.

d) Conclure.

Exercice 33. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On considère la suite u de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. On va montrer que u converge.

a) On suppose dans cette question que $x \geq 0$.

i) Montrer que la suite u est croissante.

ii) En écrivant u_n comme $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=n_0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ (pour $n \geq n_0$) et en utilisant le **c)** de l'Exercice 32, montrer que pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n \leq u_{n_0} + 2u_{n_0}\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0+1}\right)$.

En déduire que la suite u est majorée.

iii) Conclure.

b) On suppose cette fois que $x < 0$. On note $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

i) Montrer que la suite v est décroissante à partir d'un certain rang.

ii) Montrer que la suite w est croissante à partir d'un certain rang.

iii) Montrer que les suites v et w convergent vers une même limite.

iv) Conclure (on pourra utiliser l'Exercice 30).

N.B. on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \mathrm{e}^x$.

Exercice 34. Soit a_n une suite de réels *positifs* telle que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{m+n} \leq a_m + a_n.$$

a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad a_{np} \leq n a_p$.
On rappelle que pour deux entiers naturels non nuls n et p quelconques, il existe deux entiers naturels q et r tels que $n = pq + r$ et $0 \leq r \leq p - 1$.

b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \exists q \in \mathbb{N}, \quad \exists r \in \{0, \ldots, p-1\}, \quad a_n \leq q a_p + a_r.$$

c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \exists r \in \{0, \ldots, p-1\}, \quad \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_p}{p} + \frac{a_r}{n},$$

et donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_p}{p} + \frac{\max\{a_0, \ldots, a_{p-1}\}}{n}.$$

d) Justifier que l'ensemble $\left\{\frac{a_k}{k} \mid k \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet une borne inférieure qu'on notera λ.
Dans les deux questions qui suivent, ε désigne un réel strictement positif fixé.

e) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{a_p}{p} < \lambda + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

f) En déduire que, pour ce p, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda \leq \frac{a_n}{n} < \lambda + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\max\{a_0, \ldots, a_{p-1}\}}{n}.$$

g) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{n} = \lambda$.

Exercice 35. Soit $(u_n)_n$ une suite convergente vers l. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_0^n u_p$ (v est la moyenne de Césaro de u). Montrer que la suite v converge vers l.
Indications : traduire la convergence de la suite u_n vers l : "$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ldots$", puis découper la somme qui définit v_n avec l'entier n_0 introduit dans la définition en deux sommes et enfin étudier la limite de chacune des 2 sommes.

Exercice 36. Soit $A \subset \mathbb{R}$. On rappelle que A est *dense* dans $\mathbb{R}$ si pour tous x, y dans $\mathbb{R}$ avec $x < y$ il existe $a \in A$ tel que $x < a < y$. Montrer qu'un ensemble A est dense si et seulement si tout élément de $\mathbb{R}$ est la limite d'une suite d'éléments de A, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to x$.

Chapitre 4 : Séries numériques

Exercice 1. Pour chacune des séries numériques suivantes, calculer les sommes partielles, en déduire la convergence des séries et calculer leur somme.

a) $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{2}{5^n}$. **b)** $\displaystyle\sum_{n \geq 2015} \frac{2}{n(n+1)}$. **c)** $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{n+3}{n+1}\right)$.

Exercice 2. Soit $q \in \mathbb{R}$. Calculer la somme partielle d'indice n de la série de terme général q^n, $n \geq 0$. En déduire que cette série converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas calculer sa somme ainsi que le reste d'indice n.

Exercice 3. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$.

a) Montrer que $\dfrac{1}{3} S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{j-1}{3^j}$.

b) En déduire la valeur de $S_n - \frac{1}{3} S_n$.

c) En déduire que la série $\displaystyle\sum \frac{k}{3^k}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 4. Donner l'exemple d'une suite $(u_n)_n$ qui tend vers 0 et telle que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 5. On considère les suites de terme général $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$, $w_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ et $x_n = -\frac{1}{n}$.
a) Montrer que $u_n \sim w_n$ et que $v_n \sim x_n$.
b) Montrer que les suites de terme général $u_n + v_n$ et $w_n + x_n$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 6. Déterminer la nature des séries de terme général suivant en comparant celui-ci à $\frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est à préciser.

a) $a_n = \frac{1}{(2n+3)(n+7)}$.
b) $b_n = \frac{3+(-1)^n}{n}$.
c) $c_n = \frac{1+n}{n^2(n+\ln n)}$.
d) $d_n = \frac{n^3+n^2+2}{1+n^2}$.
e) $e_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.
f) $f_n = \frac{1+n}{n^2(n-\ln n)}$.
g) $g_n = \frac{n^3+2}{n^2-2n}$.
h) $h_n = \frac{n^2+n\cos n}{n+192}$.
i) $i_n = \frac{n+1}{2n(n^2+1)}$.

Exercice 7. Déterminer les valeurs des paramètres réels α et β pour lesquels la série $\sum \frac{n^\alpha}{1+n^\beta}$ converge.

Exercice 8 (Séries de Bertrand)**.** Soient α et β deux réels. On cherche à étudier la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$.
a) Si $\alpha > 1$, en posant $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$, et en comparant u_n et $v_n = \frac{1}{n^\gamma}$, montrer que la série $\sum u_n$ converge.
b) Si $\alpha < 1$, en posant $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$, et en comparant u_n et $v_n = \frac{1}{n^\gamma}$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
c) Si $\alpha = 1$ et $\beta = 1$ montrer que pour tout $n \geq 2$ on a $\frac{1}{n\ln n} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$. En déduire que la série $\sum u_n$ diverge.
d) Si $\alpha = 1$ et $\beta < 1$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
e) Si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$, montrer que pour tout $n \geq 3$ on a $\frac{1}{n\ln^\beta n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x\ln^\beta x}\,\mathrm{d}x$. En déduire que la série $\sum u_n$ converge.
N.B. : Pourquoi a-t-on supposé $n \geq 2$ et $n \geq 3$ dans les questions c) et e) ?

Exercice 9. Déterminer la nature des séries de terme général suivant.

a) $a_n = \mathrm{e}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.
b) $b_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)$.
c) $c_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
d) $d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln n}$.
e) $e_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$.
f) $f_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$.