UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

MATHÉMATIQUES POUR LES SCIENCES DE LA VIE, LICENCE 2ÈME ANNÉE : INTRODUCTION AUX SYSTÈMES D'ÉVOLUTION

Laurent BRUNEAU

Table des matières

Chapitre 1

Suites définies par récurrence

1.1 Définitions et premiers exemples

1.1.1 Définition

Définition 1.1. *Une suite est une application* $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$*. On la note en général* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou plus simplement* $(u_n)_n$*.*

Remarque 1.1. *La notation* u_n *désigne le* n*-ème terme de la suite et non pas toute la suite.*

Exemple 1.1. *La suite des carrés des entiers est* $u : n \mapsto n^2$*, i.e.* $u_0 = 0$*,* $u_1 = 1$*,* $u_2 = 4$*,...*

Remarque 1.2. *Il arrive que la suite ne soit pas définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Par exemple la suite définie par* $u_n = \frac{1}{n}$ *n'a de sens que si* $n \neq 0$*. On note alors* $(u_n)_{n\geq 1}$ *pour préciser que les valeurs autorisées de* n *commencent à 1.*

1.1.2 Suites arithmétiques

Définition 1.2. *Une suite* $(u_n)_n$ *est dite arithmétique s'il existe* $r \in \mathbb{R}$ *tel que* $u_{n+1} = u_n + d$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Le nombre* r *est alors unique et s'appelle la raison de la suite.*

Étant donné le premier terme u_0 de la suite, on calcule alors les termes suivants par $u_1 = u_0 + r$, $u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r$, etc. On montre facilement par récurrence que

> Si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = u_0 + nr$.

Exemple 1.2. *En prenant* $u_0 = 1$ *et* $r = 2$ *on obtient la suite des entiers impairs.*

Proposition 1.3. *Si* $(u_n)_n$ *est une suite arithmétique de premier terme* u_0 *et de raison* r *alors la somme des premiers termes de la suite est*

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)r}{2} = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}.$$

Démonstration. L'idée du calcul est la suivante. On écrit $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 + (u_0 + r) + \cdots + (u_0 + nr)$, puis on regroupe ensemble les termes en u_0 et les termes en r. On obtient alors $u_0 + \cdots + u_n = (n+1)u_0 + r(1 + 2 + \cdots + n)$ et il reste à calculer $1 + 2 + \cdots + n$. On écrit alors 2 fois cette somme sur 2 lignes, l'une en sens inverse de l'autre, et au lieu de sommer ligne par ligne on somme colonne par colonne :

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\ + & n & + & n-1 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline \\ = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) \\ = & n(n+1) & & & & & & & & \end{array}$$

et on trouve bien que $1 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. $\square$

Remarque 1.3. *On peut aussi montrer le résultat par récurrence (c'est plus simple à rédiger mais il faut avoir d'abord deviné la formule).*

- *Pour $n = 0$ on a bien $u_0 = (0+1) \times u_0 + \dfrac{0 \times (0+1)}{2} = \dfrac{(0+1) \times (u_0 + u_0)}{2}$.*
- *Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que le résultat est vrai pour cet entier n et on montre qu'il est vrai pour l'entier $n+1$. On écrit*

$$\begin{aligned} u_0 + \cdots + u_n + u_{n+1} &= (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)r}{2} + (u_0 + (n+1)r) \\ &= (n+1)u_0 + u_0 + \frac{n(n+1)r}{2} + (n+1)r \\ &= (n+1+1)u_0 + \frac{(n+1)(n+1+1)r}{2}. \end{aligned}$$

  Le résultat est donc vrai pour $n+1$.
- *Le principe de récurrence permet d'affirmer que le résultat est vrai pour tout n.*

1.1.3 Suites géométriques

Définition 1.4. *Une suite $(u_n)_n$ est dite géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1} = q \times u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $u_0 \neq 0$, le nombre q est alors unique et s'appelle la raison de la suite.*

Étant donné le premier terme u_0 de la suite, on calcule alors les termes suivants par $u_1 = qu_0$, $u_2 = q \times u_1 = q^2$, etc. On montre facilement par récurrence que

> Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison q alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = q^n u_0$.

Exemple 1.3. *La première année le loyer mensuel s'élève à 500 euros. L'augmentation annuelle est de 2%. À combien s'élèvera le loyer mensuel la cinquième année ?*

Si on appelle u_n le loyer mensuel en euros lors de l'année $n+1$ (ainsi le loyer de la première année est u_0) l'énoncé se traduit de la façon suivante : $u_0 = 500$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{100}u_n = 1,02 \times u_n$. Autrement dit la suite $(u_n)_n$ est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 500$ et de raison $q = 1,02$. Le loyer lors de la cinquième année est alors $u_4 = 1,02^4 \times 500 \simeq 541,22$ euros.

Remarque 1.4. *On peut faire commencer une suite géométrique à $n = 1$ (dans l'exemple précédent u_n serait le loyer lors de l'année n). La formule pour u_n devient alors $u_n = q^{n-1}u_1$: la puissance à mettre correspond à la différence entre les indices des 2 termes de la suite qui apparaissent. On aurait de même $u_{43} = q^{16}u_{27}$.*

Proposition 1.5. *Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$ alors la somme des premiers termes de la suite est*

$$u_0 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \textit{1er terme} \times \frac{1 - \textit{raison}^{\textit{nombre de termes}}}{1 - \textit{raison}}.$$

Démonstration. On a $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 + qu_0 + \cdots + q^n u_0 = u_0 \times (1 + q + \cdots + q^n)$. Par ailleurs

$$(1 + q + \cdots + q^{n-1} + q^n) \times (1 - q) = 1 - q + q - q^2 + \cdots + q^{n-1} - q^n + q^n - q^{n+1} = 1 - q^{n+1},$$

et donc $1 + q + \cdots + q^{n-1} + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. □

Exemple 1.4. *On reprend l'exemple précédent. On voudrait maintenant savoir combien de loyer on paiera au total lors des 5 années. Il faut donc calculer*

$$S = 12u_0 + 12u_1 + 12u_2 + 12u_3 + 12u_4 = 12 \times (u_0 + \cdots + u_4) = 12 \times u_0 \times \frac{1 - q^5}{1 - q}.$$

Avec $u_0 = 500$ et $q = 1,02$ on trouve alors $S \simeq 31224$ euros ce qui fait en moyenne $520,40$ euros par mois.

Application : les suites arithmético-géométriques

Définition 1.6. *Une suite $(u_n)_n$ est dite arithmético-géométrique s'il existe deux nombres a et b tels que $u_{n+1} = a \times u_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Tout comme pour les suites arithmétiques et géométriques on peut exprimer directement le terme u_n en fonction de n. On supposera $a \neq 1$ sinon la suite est simplement une suite arithmétique. Étant donné u_0 on écrit

$$\begin{array}{rcl}
u_1 &=& au_0 + b \\
u_2 &=& au_1 + b \;=\; a(au_0 + b) + b \;=\; a^2u_0 + (ab + b) \\
u_3 &=& au_2 + b \;=\; a\left(a^2u_0 + (ab + b)\right) + b \;=\; a^3u_0 + (a^2b + ab + b) \\
u_4 &=& au_3 + b \;=\; a\left(a^3u_0 + (a^2b + ab + b)\right) + b \;=\; a^4u_0 + (a^3b + a^2b + ab + b) \\
&\vdots& \\
u_n &=& a^nu_0 + (a^{n-1}b + a^{n-2}b + \cdots + ab + b) \;=\; a^nu_0 + b \times \dfrac{1 - a^n}{1 - a}.
\end{array}$$

À la dernière ligne, on utilise le fait que $a^{n-1}b + a^{n-2}b + \cdots + ab + b$ est la some des termes d'une suite géométrique de raison a et de premier terme b.

Exemple 1.5. *Je souhaite acheter une voiture. Mes revenus me permettent de rembourser au maximum* 300 *euros par mois. Pour un prêt d'une durée de* 5 *ans, la banque me propose un taux d'intérêt de* 3% *par an, soit* 0, 25% *par mois. Quel montant maximal pourrai-je emprunter à la banque et à combien se montera le montat total des intérêts que j'aurai versés ? Autrement dit, quelle est la valeur maximum de la voiture que je pourrai acheter et combien cela me coûtera-t-il de faire ce prêt ?*

On va appeler u_n le montant en euros qu'il me reste à payer à la banque après n mois. L'énoncé se traduit donc ainsi : lors du mois $n+1$ il me reste à rembourser le montant du mois précédent plus les intérêts du mois passé moins les 300 *euros de remboursement effectués, c'est-à-dire :*

$$u_{n+1} = u_n + \frac{0,25}{100} \times u_n - 300 = 1,0025 u_n - 300.$$

On a affaire à une suite arithmético-géométrique dont les paramètres a et b valent respectivement $1,0025$ *et* -300.

La durée du prêt est de 5 *ans, il faut donc qu'après* 60 *mois il ne me reste plus rien à payer, soit $u_{60} = 0$. Je cherche alors le montant que je peux emprunter soit ce qu'il me reste à payer après* 0 *mois : u_0. On écrit alors*

$$0 = u_{60} = 1,0025^{60} u_0 - 300 \times \frac{1-1,0025^{60}}{1-1,0025} \iff u_0 = \frac{300 \times \frac{1-1,0025^{60}}{1-1,0025}}{1,0025^{60}} \simeq 16696.$$

Je pourrai acheter une voiture d'environ 16696 *euros.*

Le montant total des intérêts que j'aurai versés correspond alors au montant total de mes remboursements, 300×60, *moins ce que j'ai emprunté, c'est-à-dire* $18000 - 16696 = 1304$ *euros.*

1.2 Sens de variation. Limite d'une suite

Définition 1.7.
- *On dit que la suite $(u_n)_n$ est* croissante *si $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
- *On dit que la suite $(u_n)_n$ est* strictement croissante *si $u_n < u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
- *On dit que la suite $(u_n)_n$ est* décroissante *(resp.* strictement décroissante*) si $u_n \geq u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$) pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
- *$(u_n)_n$ est dite* monotone *(resp.* strictement monotone*) si $(u_n)_n$ est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).*

Remarque 1.5. *Lorsque la relation $u_n \leq u_{n+1}$ n'est vraie qu'à partir d'un certain moment on parle alors de suite croissante* à partir d'un certain rang. *De même, on parle de suite décroissante à partir d'un certain rang. Par exemple, la suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$ si $n \geq 1$ et $u_0 = 0$ est (strictement) décroissante à partir du rang $n = 1$. En effet, si $n \geq 1$ on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$. Cependant $u_1 - u_0 = 1 > 0$.*

Dans la pratique, pour voir si une suite est croissante ou décroissante, on regarde le signe de $u_{n+1} - u_n$. Si c'est toujours positif la suite est croissante, si c'est toujours négatif la suite est décroissante.

Exemple 1.6. *a) Une suite arithmétique de raison r est croissante si $r \geq 0$ (strictement croissante si $r > 0$) et décroissante si $r \leq 0$ (strictement décroissante si $r < 0$). Dans tous les cas elle est donc monotone.*

b) Une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$ est
- *strictement croissante si $q > 1$ et $u_0 > 0$ ou bien si $0 < q < 1$ et $u_0 < 0$,*
- *strictement décroissante si $q > 1$ et $u_0 < 0$ ou bien si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$,*
- *ni croissante ni décroissante si $q < 0$ (les termes sont en alternance positifs puis négatifs).*

Si $u_0 = 0$ alors $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De même, si $q = 0$ alors $u_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Définition 1.8.
- *On dit que la suite $(u_n)_n$ est* majorée *s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout n.*
- *On dit que la suite $(u_n)_n$ est* minorée *s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ pour tout n.*
- *On dit que la suite $(u_n)_n$ est* bornée *si elle est majorée et minorée.*

Exemple 1.7. *a) La suite définie par $u_n = n^2$ est minorée (par 0) mais pas majorée.*

b) La suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$ est minorée (par 0) et majorée (par 1), donc bornée.

c) Une suite arithmétique de raison r est
- *majorée si et seulement si $r \leq 0$,*
- *minorée si et seulement si $r \geq 0$,*
- *bornée si et seulement si $r = 0$.*

d) Une suite géométrique de raison q est
- *majorée si $q > 1$ et $u_0 < 0$,*
- *minorée si $q > 1$ et $u_0 > 0$,*
- *bornée si $-1 \leq q \leq 1$ ou bien si $u_0 = 0$,*
- *ni majorée ni minorée si $q < -1$ et $u_0 \neq 0$. Par exemple avec $u_0 = 1$ et $q = -2$ la suite prend les valeurs : $1, -2, +4, -8, +16, -32$, etc.*

Définition 1.9. *Soit $(u_n)_n$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_n$ tend vers ℓ, ou converge vers ℓ, ou bien encore a pour limite ℓ, si (voir Figure 1.1)*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \ \Rightarrow\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On notera $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ ou bien $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.

L'idée derrière cette définition est que :
1) Étant donnée une erreur autorisée ε on est sur que u_n est proche de ℓ à ε près pourvu que n soit assez grand (plus grand que N).
2) L'erreur ε autorisée peut être aussi petite qu'on veut.

Remarque 1.6. *Toutes les suites n'ont pas de limite. Par exemple la suite géométrique de premier terme 1 et de raison -1 n'en a pas. En effet on a $u_n = (-1)^n$, la suite consiste en une alternance de $+1$ et -1. Cependant lorsque la limite existe elle est unique.*

Exemple 1.8. *Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q.*
- *Si $|q| < 1$ alors $u_n \to 0$.*
- *Si $q = 1$ alors $u_n \to u_0$ (la suite est constante).*

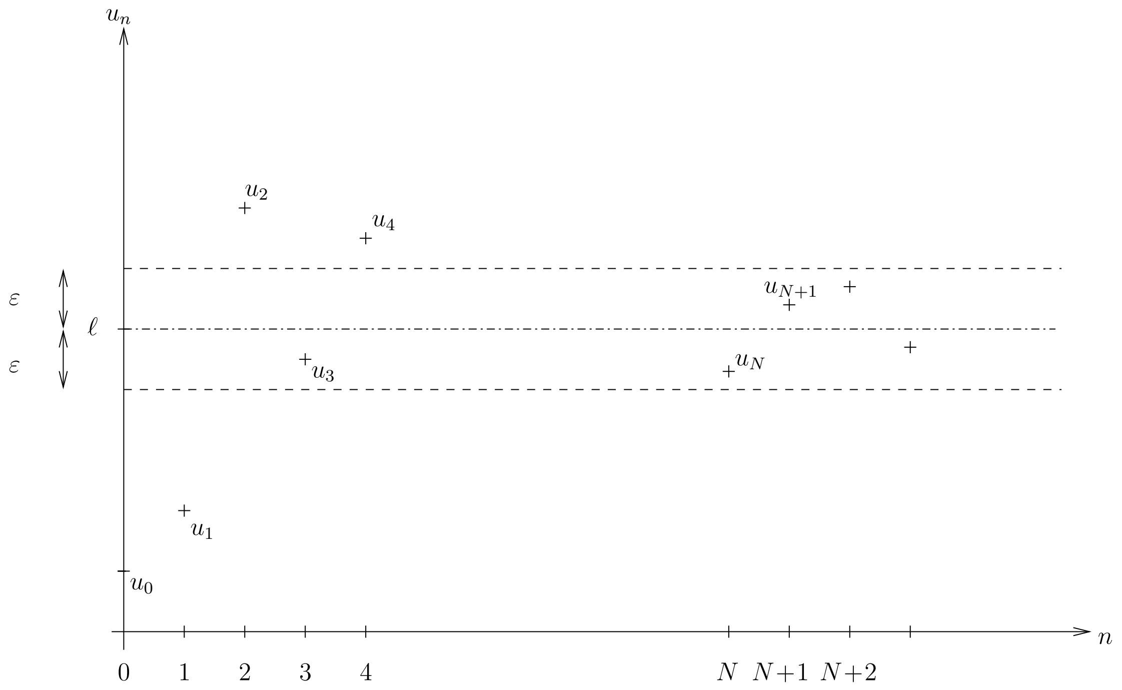


FIGURE 1.1 – Définition de la limite d'une suite

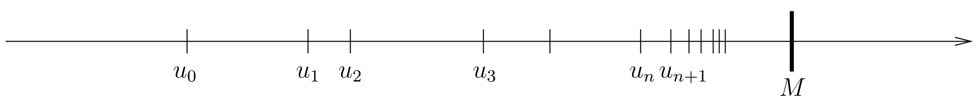
- *Si $q = -1$ (et $u_0 \neq 0$) alors la suite n'a pas de limite. Elle prend alternativement les valeurs u_0 et $-u_0$.*
- *Si $|q| > 1$ (et $u_0 \neq 0$) alors $|u_n|$ devient de plus en plus grand : $|u_n|$ tend vers $+\infty$.*

Proposition 1.10. *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites telles que $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$.*

1. $u_n + v_n \to \ell + \ell'$.
2. $u_n v_n \to \ell\ell'$.
3. *Si $u_n \neq 0$ et $\ell \neq 0$ alors* $\dfrac{1}{u_n} \to \dfrac{1}{\ell}$, *et* $\dfrac{v_n}{u_n} \to \dfrac{\ell'}{\ell}$.

Théorème 1.11. *Si $(u_n)_n$ est une suite croissante (à partir d'un certain rang) et majorée par M, alors $u_n \to \ell$ avec $\ell \leq M$. De même, si $(u_n)_n$ est une suite décroissante (à partir d'un certain rang) et minorée par m, alors $u_n \to \ell$ avec $\ell \geq m$.*

Inversement, si $(u_n)_n$ est croissante mais pas majorée alors $u_n \to +\infty$, et si si $(u_n)_n$ est décroissante mais pas minorée alors $u_n \to -\infty$.



Attention ! 1) On peut avoir $u_n < M$ pour tout entier n et cependant $\ell = M$. Par exemple $u_n = -\frac{1}{n}$ vérifie $u_n < 0$ pour tout n et elle est croissante. Cependant $u_n \to 0$.

2) On n'a pas forcément $\ell = M$. Par exemple, la suite définie par $u_n = -\frac{1}{n}$ est croissante et vérifie $u_n \leq 1$ pour tout entier n. Cependant $u_n \to 0 < 1$.

Théorème 1.12. *(des gendarmes). Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites telles que $u_n \to \ell$, $w_n \to \ell$ et pour tout n (assez grand) $u_n \leq v_n \leq w_n$. Alors $v_n \to \ell$.*

1.3 Étude des suites définies par récurrence

1.3.1 Définition

Définition 1.13. *Une suite définie par récurrence est une suite vérifiant $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout n où g est une fonction donnée.*

Exemple 1.9. *Les suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques sont des suites définies par récurrence dont la fonction g est, successivement, $g(x) = x + r$, $g(x) = qx$ et $g(x) = ax + b$.*

Exemple 1.10. *Si u_n représente le nombre d'individus dans une population à l'instant n et si N, resp. M, note le taux de natalité, resp. de mortalité, par individu et par unité de temps, l'évolution du nombre d'individus est alors donné par l'équation*

$$u_{n+1} - u_n = Nu_n - Mu_n = ru_n \qquad \textit{(variation = nombre de naissances - nombre de morts)} \tag{1.1}$$

où on a noté $r = N - M$. Autrement dit on a $u_{n+1} = (1 + r)u_n$ et on a affaire à une suite géométrique de raison $1 + r$.

1.3.2 Représentation graphique

On peut représenter graphiquement les termes d'une suite définie par récurrence à l'aide d'une "toile d'araignée", voir Figure 1.2. Un tel graphique permet de "deviner" le comportement de la suite : est-elle croissante ? décroissante ? a-t-elle une limite ? laquelle ?

1.3.3 Points fixes et limites des suites définies par récurrence

Définition 1.14. *Les solutions de l'équation $g(x) = x$ s'appellent les points fixes de g.*

Exemple 1.11. *Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$. Les points fixes de g sont les nombres x (différents de 0) tels que*

$$g(x) = x \iff x + \frac{2}{x} = 2x \iff \frac{2}{x} = x \iff 2 = x^2.$$

La fonction g a donc deux points fixes : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

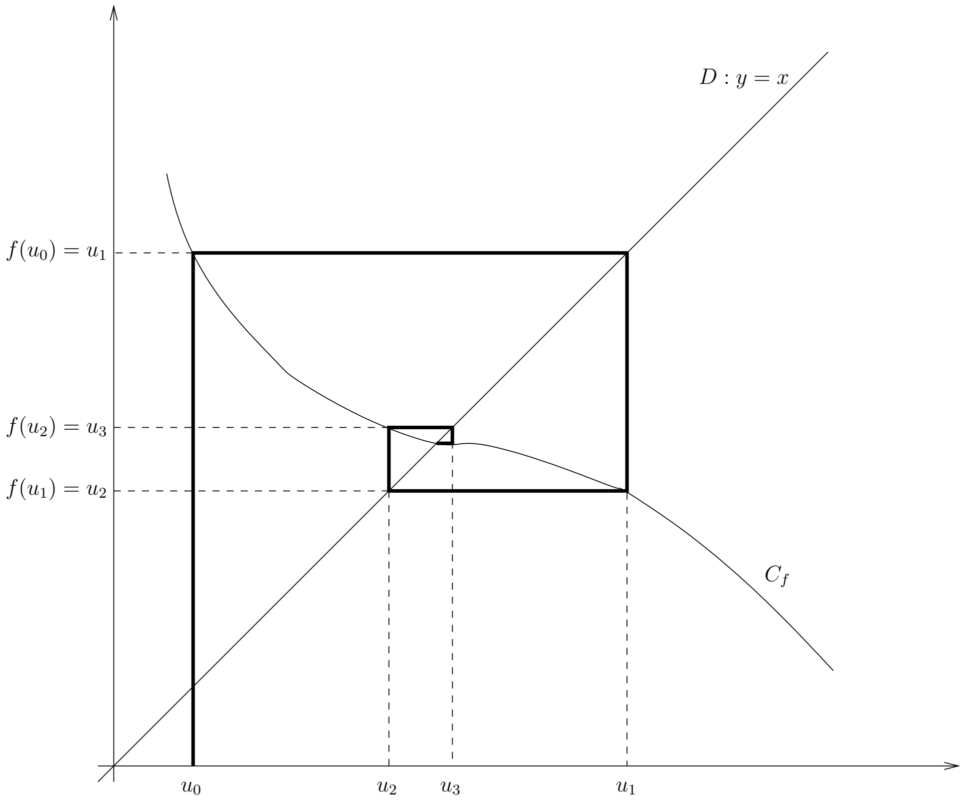


FIGURE 1.2 – Représentation graphique : la toile d'araignée

Exemple 1.12. *On fixe deux nombres $r, M > 0$. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{rx}{1 + x/M}$. La suite définie par $u_{n+1} = g(u_n)$ s'appelle le modèle de Beverton-Holt et a été introduit pour étudier des modèles d'évolution de population de poissons. Les points fixes de g sont les nombres x (différents de $-M$ sinon g n'est pas définie) tels que*

$$g(x) = x \iff \frac{rx}{1 + x/M} = x \iff x\left(\frac{r}{1 + x/M} - 1\right) = 0.$$

Cette équation est vérifiée (un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul) soit si $x = 0$ soit si

$$\frac{r}{1 + x/M} = 1 \iff 1 + x/M = r \iff x = M(r - 1).$$

La fonction g a donc 2 points fixes : 0 et $M(r-1) = K$. Lorsque $r > 1$ le nombre K s'appelle la capacité limite de la population.

L'appellation “point fixe” provient du fait suivant. Si $(u_n)_n$ est définie par récurrence par $u_{n+1} = g(u_n)$ et si pour un certain entier N le nombre u_N est un point fixe de f, alors pour tout $n \geq N$ on a $u_n = u_N$: lorsque la suite prend pour valeur un point fixe à un certain moment elle y reste à jamais. En effet, par définition $u_{N+1} = g(u_N)$ mais $g(u_N) = u_N$ donc $u_{N+1} = u_N$ et ainsi de suite. Un cas particulier important est lorsque u_0 est un point fixe.

La seconde importance des points fixes est que ce sont les limites possibles d'une suite définie par récurrence :

Proposition 1.15. *Si la fonction g est continue et si la suite définie par récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ a une limite ℓ, alors ℓ est un point fixe.*

Attention ! On ne dit pas que toutes les suites définies par récurrence ont pour limite un point fixe. Ce que le résultat dit c'est que *s'il y a une limite alors c'est un point fixe.* Mais il se peut que la suite n'ait pas de limite. Prenons par exemple la fonction $f(x) = 2x$. Cette fonction possède un point fixe : 0. Cependant la suite définie par $u_{n+1} = 2u_n$ est une suite géométrique de raison 2 et ne tend vers 0 que si $u_0 = 0$. Pour $u_0 = 1$ par exemple on a $u_n = 2^n$ qui tend vers l'infini.

Afin d'étudier une suite par récurrence, on peut alors essayer d'utiliser le schéma directeur suivant :

1. À l'aide de la toile d'araignée on conjecture le comportement de la suite.
2. On cherche les points fixes de f afin de déterminer les limites potentielles de la suite.
3. Si possible, on utilise l'un des résultats généraux sur les limites pour montrer que la suite a effectivement une limite. Par exemple que la suite est croissante et majorée ou bien décroissante et minorée.

Exemple 1.13. *Reprenons la fonction $g(x) = \dfrac{rx}{1 + x/M}$ dont les points fixes sont 0 et $K = M(r - 1)$. On considère la suite définie par $u_0 > 0$ donné et $u_{n+1} = g(u_n)$. La fonction g est bien continue donc si la suite a une limite celle-ci vaut nécessairement soit 0 soit K.*

On commence par remarquer que si $x > 0$ alors $g(x) > 0$. Comme $u_0 > 0$ on aura $u_1 = g(u_0) > 0$, $u_2 = g(u_1) > 0$ et ainsi de suite. Donc $u_n > 0$ pour tout entier n. Le nombre u_n représentant un nombre d'individus, il est important de s'assurer que la suite qu'on étudie a bien un sens : un nombre d'individus doit toujours être positif. En particulier si $r < 1$ on trouve que le point fixe K est strictement négatif et ne nous intéressera pas.

On trace ensuite la toile d'araignée correspondante. On va distinguer les deux cas $r \leq 1$, 0 est alors le seul point fixe, et $r > 1$ (il y a 2 points fixes).

<u>1er cas : $r \leq 1$</u>. On conjecture que la suite est décroissante et qu'elle tend vers 0 : la population s'éteind. On va essayer de le justifier.

- *On calcule $u_{n+1} - u_n$. On a*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{ru_n}{1 + u_n/M} - u_n = \frac{rMu_n - u_n(M + u_n)}{M + u_n} = \frac{u_n}{M + u_n} \times [\underbrace{(r-1)M}_{=K} - u_n]. \tag{1.2}$$

  Puisque $u_n > 0$, $M > 0$ et $r - 1 \leq 0$ on a $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite est décroissante.
- *Pour tout n on a $u_n > 0$ donc la suite est minorée par 0.*
- *La suite est décroissante et minorée par 0, elle a donc une limite $\ell \geq 0$.*
- *La fonction f possède un seul point fixe 0, la limite de la suite est donc nécessairement 0.*

<u>2nd cas : $r > 1$</u>. Si u_0 vaut soit 0 soit K on sait que la suite est constante (points fixes). Sinon, on conjecture cette fois que si $u_0 < K$ la suite est strictement croissante et tend vers

K et que si $u_0 > K$ la suite est strictement décroissante et tend également vers K. À nouveau on va essayer de le justifier. On traite le cas $u_0 < K$, l'autre cas est similaire.

On va essayer de montrer par récurrence que pour tout n on a "$u_n < u_{n+1}$ et $u_n < K$".

- *Pour $n = 0$ on a bien $u_0 < K$ par hypothèse. De plus, cf (1.2) avec $n = 0$, $u_1 - u_0 = \frac{u_0}{M+u_0} \times [K - u_0] > 0$.*
- *On suppose le résultat vrai pour un certain entier n, c'est-à-dire on suppose que $u_n < u_{n+1}$ et $u_n < K$. On essaie alors de montrer que $u_{n+1} < u_{n+2}$ et que $u_{n+1} < K$.*
  On a $u_{n+1} - K = f(u_n) - K = \frac{ru_n}{1+u_n/M} - K = \frac{M(u_n-K)}{M+u_n}$ (on a utilisé $rM - K = M$). Par hypothèse de récurrence $u_n < K$ et donc $u_{n+1} - K < 0$, i.e. $u_{n+1} < K$.
  On a $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{M+u_{n+1}} \times [K - u_{n+1}] > 0$ (c'est (1.2) avec $n+1$ au lieu de n), d'où $u_{n+1} < u_{n+2}$.

On a donc montré que pour tout n on avait $u_n < u_{n+1}$, la suite est strictement croissante, et $u_n < K$, la suite est majorée par K. Conclusion : la suite $(u_n)_n$ converge et sa limite ℓ vérifie $\ell \leq K$. Par ailleurs ℓ est un point fixe donc ℓ vaut 0 ou K. Ces deux nombres sont tous les deux inférieurs à K donc a priori possibles. Pour décider on remarque que la suite est strictement croissante donc sa limite ℓ vérifie $\ell > u_0 > 0$. Finalement la limite est bien K.

1.3.4 Stabilité des points fixes

Lorsque la fonction g est plus compliquée il n'est pas toujours évident, voir même possible, d'étudier complètement la suite $(u_n)_n$ comme dans l'exemple précédent. On peut néanmoins conforter l'impression obtenue graphiquement en étudiant ce qu'on appelle la "stabilité" des points fixes.

L'idée d'un point fixe est que lorsqu'on est dessus on n'en bouge plus. La question de la stabilité d'un point fixe est : que se passe-t-il si on s'en écarte un tout petit peu. Va-t-on continuer à s'en éloigner ou bien au contraire va-t-on y revenir (ou du moins rester proche) ? Prenons l'exemple d'un pendule : une tige rigide est munie d'une bille à une extrémité, est fixée au mur à l'autre et peut tourner autour de son point de fixation. Il y a alors 2 points fixes : vertical la bille vers le bas et vertical la bille vers le haut. Si on déplace un peu le pendule alors que la bille est vers le haut celui-ci va basculer vers le bas : le point fixe est instable. Si au contraire on déplace un peu le pendule alors que la bille est vers le bas celui-ci va se mettre à osciller légèrement et revenir à la verticale (la bille en bas) : le point fixe est stable.

En ce qui concerne les suites, un point fixe sera dit *stable* si lorsque u_0 est proche d'un point fixe alors tous les termes de la suite restent proches de ce point fixe et il sera instable sinon. La question est bien entendu : "Comment décider si un point fixe est stable ou instable ?"

Prenons donc un point fixe ℓ. Lorsque u_n est proche de ℓ on peut approcher la fonction f par sa tangente et écrire

$$u_{n+1} = g(u_n) \simeq g(\ell) + g'(\ell) \times (u_n - \ell).$$

Puisque ℓ est un point fixe on a $g(\ell) = \ell$ et donc $u_{n+1} - \ell \simeq g'(\ell) \times (u_n - \ell)$. La suite $v_n = u_n - \ell$ se comporte donc approximativement comme une suite géométrique de raison $g'(\ell)$. Dire que u_n reste proche de ℓ revient à dire que v_n reste proche de 0. Or on a vu qu'une

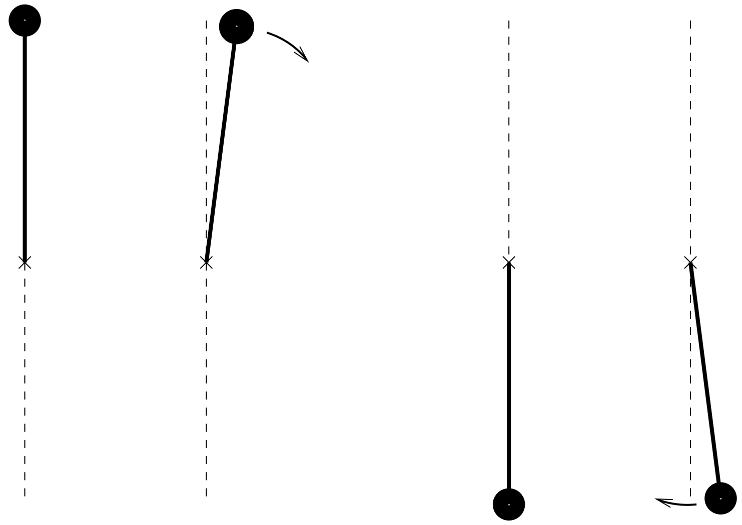


FIGURE 1.3 – Pendule : point fixe instable / point fixe stable

suite géométrique de raison q tendait vers 0 si $|q| < 1$ et au contraire augmentait (en valeur absolue) si $|q| > 1$. Pour décider si un point fixe ℓ est stable ou non il suffit donc de calculer $g'(\ell)$ et de comparer $|g'(\ell)|$ et 1.

Définition 1.16. *Un point fixe ℓ de g est stable si $|g'(\ell)| < 1$ et instable si $|g'(\ell)| > 1$.*

Remarque 1.7. *Lorsque $|g'(\ell)| = 1$ la situation est plus compliquée et on ne peut pas décider directement de la stabilité du point fixe.*

Exemple 1.14. *À titre d'illustration, reprenons l'exemple de la section précédente, i.e. $g(x) = \dfrac{rx}{1 + x/M}$. Les points fixes sont 0 et, si $r > 1$, $K = M(r-1)$. On calcule $g'(x) = \dfrac{rM^2}{(x+M)^2}$.*

On a alors $g'(0) = r$, il est stable si $r < 1$ (dans ce cas la suite de premier terme u_0 convergeait toujours vers 0) et instable si $r > 1$ (dans ce cas, à part pour $u_0 = 0$, la suite convergeait toujours vers K et donc s'éloignanit de 0).

Et pour $r > 1$ on trouve $g'(K) = \dfrac{rM^2}{(K+M)^2} = \dfrac{rM^2}{((r-1)M+M)^2} = \dfrac{1}{r}$ qui est strictement inférieur à 1 en valeur absolue. Le point fixe K est donc stable (à part pour $u_0 = 0$ la suite convergeait toujours vers K).

Chapitre 2

Équations différentielles autonomes

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude d'équations différentielles du type $x'(t) = f(x(t))$, ou plus simplement $x' = f(x)$ où f est une fonction donnée.

Exemple 2.1. *Le cas le plus simple d'une telle équation est lorsque la fonction f est linéaire, i.e. $f(x) = rx$ où r est un nombre donné. L'équation différentielle considérée est $x'(t) = rx(t)$ dont les solutions sont les fonctions $x(t) = C\mathrm{e}^{rt}$ où C est une constante que l'on détermine en général à l'aide de conditions initiales.*

Si $x(t)$ représente le nombre d'individus dans une population à l'instant t, et si N, resp. M, note le taux de natalité, resp. de mortalité, par individu et par unité de temps, l'évolution du nombre d'individus est alors donné par l'équation

$$x'(t) = Nx(t) - Mx(t) = rx(t) \qquad \textit{(variation = nombre de naissances - nombre de morts)} \tag{2.1}$$

où on a noté $r = N - M$. À partir de la solution $x(t) = x_0\mathrm{e}^{rt}$ (x_0 est ici la population initiale), on peut immédiatement remarquer que le nombre d'individu augmente si $r > 0$ (plus de naissances que de morts) et décroit dans le cas contraire.
N.B. Si $r > 0$ la croissance est exponentielle (très rapide) et ne rend compte de la réalité que pour des durées pas trop grandes. C'est cependant le cas de la population humaine terrestre au cours du 20ème siècle.

Le modèle est ici trop simple, on a considéré que les taux de natalité et de mortalité étaient constants, et dans la pratique ils ne le sont pas. Le taux de natalité peut diminuer lorsque la population augmente à cause par exemple des ressources limitées.

Ces équations sont la version "continue" des suites par récurrence étudiées dans le chapitre précédent. Dans la plupart des modèles d'évolution de population, sinon tous, on détermine la variation de cette dernière, "nombre de naissances - nombre de morts" par exemple (c'était aussi le cas de l'évolution du prêt bancaire de l'Exemple 1.5). Dans le cas continu on obtient une équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t))$$

alors que dans le cas des suites on obtient une relation du type

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) \iff u_{n+1} = g(u_n) \quad \text{où} \quad g(x) = x + f(x).$$

A titre d'exemple on pourra comparer (1.1) et (2.1). Si on veut comparer ce qui se passe dans la version "temps discret", i.e. pour une suite définie par récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$, et dans la version "temps continu", i.e. pour une équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$, les deux fonctions f et g ne sont donc pas les même mais vérifient $g(x) = x + f(x)$.

On parle ici d'équation autonome parceque la variable t (le temps) n'y figure pas explicitement. Une équation du type $x'(t) = tx(t)$, que l'on sait résoudre par ailleurs (voir cours de L1), n'est pas une équation différentielle autonome à cause du facteur t apparaissant devant $x(t)$. L'inconnue est ici la fonction $x(t)$. En plus de l'équation on spécifie en général une condition dite initiale, par exemple la valeur $x(0)$ (tout comme pour les suites par récurrence où l'on précise la valeur du premier terme u_0). La solution de l'équation $x' = f(x)$ est alors une fonction dérivable (puisque sa dérivée x' apparait) définie sur un certain intervalle I.

Attention ! La solution d'une équation différentielle $x' = f(x)$ n'est pas forcément une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Si on prend l'équation $x' = x^2$, autrement dit la fonction f est la fonction $f(x) = x^2$, avec $x(0) = 1$ on peut alors montrer (voir Section 2.2.2) que $x(t) = \dfrac{1}{1-t}$ qui ne sera définie que jusquà $t = 1$ (la valeur 1 étant exclue).

Pour étudier une telle équation il y a plusieurs possibilités :

1. Résolution exacte (ou méthode dite analytique). On cherche à résoudre explicitement l'équation différentielle et on étudie ensuite la solution. On verra dans la Section 2.2.2 qu'en théorie une équation différentielle $x' = f(x)$ peut toujours être résolue. Dans la pratique cependant c'est moins souvent le cas même pour des équations en apparence très simples. Par ailleurs, même si on arrive à appliquer la méthode de résolution, la solution est souvent très compliquée et donc difficile à étudier (quel serait l'intérêt d'avoir une formule explicite si l'on ne peut rien en tirer comme informations ?).
2. Méthode qualitative (et graphique). On ne cherche plus à avoir de formule explicite pour la (les) solution(s) mais uniquement à avoir des informations sur celle(s)-ci : sens de variation, limite, notion de "point fixe" (on parlera ici de solution stationnaire), stabilité. C'est l'équivalent de ce qu'on a fait sur les suites définies par récurrence. Cette approche a aussi l'avantage de se généraliser, en partie du moins, au cas de plusieurs équations différentielles à plusieurs inconnues (voir Chapitre 5).
3. Méthode numérique. On cherche là uniquement des solutions approchées. À l'aide des outils informatiques on peut aujourd'hui atteindre une très grande précision.

Avant d'étudier les solutions d'une équation, la première question à poser est : "y a-t-il des solutions et si oui combien ?". Sauf à choisir des fonctions f très particulières, l'équation $x' = f(x)$ possède toujours des solutions. En général elle en a une infinité !

L'équation $x'(t) = 2x(t)$ par exemple a pour solutions toutes les fonctions de la forme $x(t) = Ce^{2t}$ où C est une constante. Si on veut préciser la valeur de cette constante on impose par exemple la valeur de $x(0)$. Si on prend $x(0) = 3$ la constante C est telle que $3 = Ce^{2\times 0}$ c'est-à-dire $C = 3$ et donc il y a une seule solution $x(t) = 3e^{2t}$ qui vérifie à la fois $x'(t) = 2x(t)$ et $x(0) = 3$.

On voudrait donc savoir si, étant donnée une valeur x_0 à un instant donné t_0 (en général $t_0 = 0$), le problème $\left\{\begin{array}{l} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right.$ possède une unique solution. Bien que la réponse naturelle soit "oui" (si je connais la situation à l'instant initial et si je sais comment elle doit évoluer, il ne peut y avoir qu'une seule solution), ce n'est en fait pas forcément le cas.

Exemple 2.2. *Soit f la fonction définie par $f(x) = 2\sqrt{x}$ et $x_0 = 0$, on regarde donc le problème* $\begin{cases} x'(t) = 2\sqrt{x(t)} \\ x(0) = 0 \end{cases}$*. On peut facilement vérifier que pour n'importe quel constante $a \geq 0$ la fonction* $x(t) = \begin{cases} 0 & si\ x < a \\ (t-a)^2 & sinon \end{cases}$ *est solution. Bien qu'on ait précisé la valeur de $x(0)$ il y a toujours une infinité de solutions.*

On admettra le résultat suivant

Théorème 2.1. *("Cauchy-Lipschitz") Si la fonction f est dérivable et sa dérivée f' est continue alors pour n'importe quels t_0, x_0 (dans le domaine de définition de f) le problème* $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ *admet une unique solution $x(t)$ définie sur un certain intervalle $I =]T_-, T_+[$ contenant t_0. La quantité T_- est un nombre strictement inférieur à t_0 ou égal à $-\infty$ et la quantité T_+ est un nombre strictement supérieur à t_0 ou égal à $+\infty$.*

On peut remarquer que dans l'exemple précédent la fonction $f(x) = 2\sqrt{x}$ ne vérifie pas les hypothèses de ce théorème puisqu'elle n'est pas dérivable en 0. Dans la pratique, pour toutes les équations que l'on rencontrera, la fonction f vérifiera les hypothèses du théorème et on ademttra qu'il y a une seule solution. Le but sera surtout d'étudier cette solution. On verra cependant que le théorème précédent permet d'obtenir très facilement des informations sur cette dernière.

Dans toute la suite, f sera une fonction fixée dérivable et dont la dérivée est continue, et on fixera l'instant initial à $t_0 = 0$. On s'intéressera à l'étude de la solution pour $t \geq 0$: on part de l'instant initial $t_0 = 0$ et on regarde comment la solution évolue. En particulier, le théorème précédent nous dit qu'il y a exactement une solution de condition initiale x_0 donnée et que celle-ci est définie sur un intervalle $[0, T[$, T étant éventuellement égal à $+\infty$.

2.2 Méthode analytique

2.2.1 Solutions stationnaires

Il y a certaines conditions initiales, i.e. valeurs de x_0, pour lesquelles la solution est particulièrement simple. Elles sont l'équivalent des points fixes du chapitre précédent, on parlera ici de solutions stationnaires : elles ne dépendent pas du temps.

Si une solution $x(t)$ ne dépend pas du temps, autrement dit elle est constante égale à x_0, alors sa dérivée est nulle. Comme $x'(t) = f(x(t))$ on a nécessairement $f(x_0) = 0$. Réciproquement, si la condition initiale x_0 vérifie $f(x_0) = 0$ alors la fonction $x(t)$ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et constante égale à x_0 vérifie $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ et est donc la solution.

Pour résumer :

Définition 2.2. *On appelle solution stationnaire de l'équation $x' = f(x)$ toute solution qui est constante.*

Proposition 2.3. *La fonction constante égale à x_0 est une solution stationnaire si et seulement si $f(x_0) = 0$.*

Remarque 2.1. *Si on veut comparer avec ce qui se passe pour les suites, il faut se rappeler que la version "suites" de l'équation différentielle $x' = f(x)$ est la suite définie par récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ où $g(x) = x + f(x)$. Les points fixes de la suite vérifient l'équation $g(x) = x$ (voir Chapitre 1, Section 1.3), c'est-à-dire $f(x) = 0$. Que l'on étudie la version "suites" ou "équations différentielles" on retrouve bien les même points fixes.*

Exemple 2.3. *Soit f la fonction $f(x) = x^2$. On a $x^2 = 0$ si et seulement si $x = 0$. Il y a donc exactement une solution stationnaire à cette équation, la fonction constante égale à 0.*

Exemple 2.4. *Soit f la fonction $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{M}\right)$ où r et M sont deux nombres strictement positifs. Cette fonction a été proposée par Verhulst (milieu du 19ème siècle) pour corriger la croissance exponentielle de la population, dans le cas $r > 0$, en tenant compte de la diminution du taux de natalité lorsque la population augmente. Ici la différence entre les taux de natalité n et de mortalité m est $n - m = r\left(1 - \frac{x}{M}\right)$ (on retrouve bien que l'équation s'écrira $x'(t) = (n - m)x(t)$ mais ici $n - m$ n'est pas constant. La constante M s'interprète comme la capacité d'accueil de l'environnement (on verra pourquoi dans la Section 2.3.3).*

L'équation $f(x) = 0$ a ici exactement 2 solutions : $x = 0$ et $x = M$. Il y a deux solutions stationnaires à l'équation $x'(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{M}\right)$, l'une correspondant à une absence d'individus ($x(t) = 0$) et l'autre lorsque la population "sature" la capacité d'accueil du milieu ($x(t) = M$).

2.2.2 Résolution exacte

Étant donnés f et x_0 on va chercher à résoudre explicitement l'équation $x'(t) = f(x(t))$ avec la condition initiale $x(0) = x_0$. On va supposer que $f(x_0) \neq 0$ sinon on a vu que la solution est la fonction constante égale à x_0.

On commence par réécrire l'équation sous la forme

$$\frac{x'(t)}{f(x(t))} = 1. \tag{2.2}$$

Si on appelle F une primitive de la fonction $\frac{1}{f}$ on peut alors vérifier (dérivation de fonctions composées) que la dérivée de la fonction $F(x(t))$ est alors précisément $\frac{x'(t)}{f(x(t))}$. Comme cette dérivée vaut 1 on en déduit que

$$F(x(t)) = t + C$$

où C est une constante. Celle-ci est déterminée par $x(0) = x_0$ et on obtient

$$F(x(t)) = t + F(x_0).$$

Pour obtenir $x(t)$ il reste à inverser la fonction F, autrement dit à résoudre l'équation $F(x) = t + F(x_0)$ où l'inconnue est x.

Pour voir comment ça marche reprenons les deux exemples de la Section précédente.

Exemple 2.5. *On considère l'équation* $x'(t) = x(t)^2$ *avec* $x(0) = x_0$ *donné, c'est-à-dire que* $f(x) = x^2$*. La fonction* $\frac{1}{f}$ *est la fonction* $\frac{1}{x^2}$ *qui est la dérivée de* $F(x) = -\frac{1}{x}$*. On obtient donc*

$$-\frac{1}{x(t)} = t - \frac{1}{x_0} \quad \Longleftrightarrow \quad x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}. \tag{2.3}$$

On remarque que $\frac{x_0}{1 - x_0 t}$ *n'est pas défini si* $1 - x_0 t = 0$*, c'est-à-dire si* $t = \frac{1}{x_0}$*. La solution est a priori définie sur un intervalle* $[0, T[$*, on obtient donc qu'ici la fonction* $x(t)$ *est bien définie sur* $[0, +\infty[$*, i.e.* $T = +\infty$*, si* $x_0 < 0$*, par contre elle n'est définie que sur* $\left[0, \frac{1}{x_0}\right[$*, i.e.* $T = \frac{1}{x_0}$*, si* $x_0 > 0$*.*

Exemple 2.6. *On considère l'équation* $x'(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{M}\right)$ *avec* $x(0) = x_0$ *donné, c'est-à-dire que* $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{M}\right)$*. On a alors* $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{rx\left(1 - \frac{x}{M}\right)}$*. On peut décomposer cette fonction sous la forme*

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{rx} + \frac{1}{r(M - x)}.$$

Une primitive de $\frac{1}{x}$ *est* $\ln(x)$ *si* $x > 0$ *et* $\ln(-x)$ *si* $x < 0$*, autrement dit* $\ln(|x|)$*. De même, une primitive de* $\frac{1}{M - x}$ *est* $-\ln(|M - x|)$*. Finalement on obtient que* $F(x) = \frac{1}{r}\ln(|x|) - \frac{1}{r}\ln(|M - x|) = \frac{1}{r}\ln\left(\left|\frac{x}{M - x}\right|\right)$ *est une primitive de* $\frac{1}{f}$*, et donc*

$$\frac{1}{r}\ln\left(\left|\frac{x(t)}{M - x(t)}\right|\right) = t + \frac{1}{r}\ln\left(\left|\frac{x_0}{M - x_0}\right|\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\frac{x(t)}{M - x(t)}\right| = \left|\frac{x_0}{M - x_0}\right| \mathrm{e}^{rt}. \tag{2.4}$$

Il faut ensuite exprimer $x(t)$ *en fonction de* x_0*. On peut montrer qu'on peut enlever les valeurs absolues dans l'identité ci-dessus (voir Exemple 2.8). On a alors*

$$\begin{aligned}
\frac{x(t)}{M - x(t)} = \frac{x_0}{M - x_0}\mathrm{e}^{rt} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{M - x(t)}{x(t)} = \frac{M - x_0}{x_0}\mathrm{e}^{-rt} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{M}{x(t)} - 1 = \frac{M - x_0}{x_0}\mathrm{e}^{-rt} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{M}{x(t)} = 1 + \frac{M - x_0}{x_0}\mathrm{e}^{-rt} \\
&\Longleftrightarrow \quad x(t) = \frac{M}{1 + \frac{M - x_0}{x_0}\mathrm{e}^{-rt}}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

On remarque que $x(t) = \frac{M}{1 + \frac{M - x_0}{x_0}\mathrm{e}^{-rt}}$ *n'est pas défini si* $1 + \frac{M - x_0}{x_0}\mathrm{e}^{-rt} = 0$*. Si* $\frac{M - x_0}{x_0} \geq 0$*, i.e.* $x_0 \in]0, M[$*, il n'y a pas de valeur interdite car une exponentielle est toujours positive, et* *sinon il y a une valeur interdite* $t = -\frac{1}{r}\ln\left(\frac{x_0}{x_0 - M}\right)$. *Dans le cas* $x_0 > M$ *on a* $\frac{x_0}{x_0 - M} > 1$ *et donc la valeur interdite est négative. Si* $x_0 < 0$ *on a* $\frac{x_0}{x_0 - M} > 1$ *et donc la valeur interdite est positive. La solution est a priori définie sur un intervalle* $[0, T[$, *on obtient donc qu'ici la fonction* $x(t)$ *est bien définie sur* $[0, +\infty[$, *i.e.* $T = +\infty$, *si* $x_0 > 0$, *par contre elle n'est définie que sur* $[0, T[$ *avec* $T = -\frac{1}{r}\ln\left(\frac{x_0}{x_0 - M}\right)$, *si* $x_0 < 0$.

Pour diviser par $f(x(t))$ dans (2.2) il faudrait d'abord s'assurer que ce dernier est différent de 0. Par exemple, dans l'exemple 2.5, est-on sur que $x(t)^2 \neq 0$? Supposons donc que $x(t)$ est une solution et que $f(x(t))$ s'annule pour un certain t_* et on note $x_* = x(t_*)$. Ainsi $f(x_*) = 0$. Autrement dit la fonction constante égale à x_* est une solution (stationnaire) de l'équation. La fonction $x(t)$ et la fonction constante égale à x_* sont donc toutes les deux solutions de l'équation $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_*) = x_* \end{array}\right.$ Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit que forcément ces deux fonctions coincident. En particulier $x_0 = x(t_0) = x_*$ ce qui contredit $f(x_0) \neq 0$.
Conclusion : Étant donnée une solution de l'équation $x' = f(x)$, soit $f(x(t))$ est toujours nul (si on a une solution stationnaire), soit il ne l'est jamais. On verra dans la section suivante que cette remarque nous permet d'obtenir facilement des informations sur une solution de l'équation même sans la résoudre explicitement.

Remarque 2.2. *Dans la plupart (sinon tous) des modèles d'évolution de population,* 0 *est une solution stationnaire et donc* $f(0) = 0$ *: s'il n'y a pas d'individus au départ il ne se passera rien. Si on part d'une population initiale* $x_0 > 0$ *alors on aura forcément* $x(t) > 0$ *pour tout* t. *En effet, soit* $f(x_0) = 0$, *on a une solution stationnaire et* $x(t) \equiv x_0$, *soit* $f(x_0) \neq 0$. *Dans ce cas on a vu que* $f(x(t))$ *ne pourrait jamais s'annuler, et donc en particulier on ne pourra pas avoir* $x(t) = 0$ *puisque* $f(0) = 0$. *Si* $x(t)$ *n'était pas toujours positif il passerait forcément par la valeur* 0 *ce qui est impossible.*

En conclusion, contrairement au cas des suites, la vérification du fait que le nombre d'individus $x(t)$ *reste toujours positif est en général très facile à vérifier. C'est par exemple le cas dès que* 0 *est une solution stationnaire.*

2.3 Étude qualitative des solutions

2.3.1 Sens de variation

Le sens de variation d'une solution $x(t)$ de l'équation $x' = f(x)$ est assez simple à connaitre. Pour connaitre le sens de variation de la fonction $x(t)$ il suffit de connaitre le signe de sa dérivée $x'(t)$. Comme $x'(t) = f(x(t))$, connaitre le signe de $x'(t)$ revient à connaitre le signe de $f(x(t))$. Étant donné x_0, il y a 3 cas à distinguer selon la valeur de $f(x_0)$.

- Si x_0 est tel que $f(x_0) = 0$ on a vu que la solution était la fonction constante égale à zéro.
- Si x_0 est tel que $f(x_0) > 0$. La quantité $f(x(t))$ n'est pas "toujours nulle" ($f(x(0)) = f(x_0)$ ne l'est pas) donc on a vu précédemment qu'elle ne l'est jamais. On en déduit que $f(x(t))$ est toujours positif. En effet si on avait $f(x(T)) < 0$ pour un certain T,

comme $f(x(0)) > 0$, on aurait $f(x(t_*)) = 0$ pour un certain $t_* \in]0, T[$ ce qui contredit le fait que $f(x(t))$ ne s'annule pas.
Conclusion : si $f(x_0) > 0$, alors $f(x(t)) = x'(t)$ est toujours strictement positif et donc la solution $x(t)$ de l'équation est une fonction strictement croissante.

- Si $f(x_0) < 0$, en faisant le même raisonnement que ci-dessus on en déduit que la solution $x(t)$ de l'équation est une fonction strictement décroissante.

Au final on a la propriété suivante :

Proposition 2.4. *La solution d'une équation différentielle $x' = f(x)$ est toujours monotone. Si $f(x_0) > 0$ alors on a une solution croissante et si $f(x_0) < 0$ on a une solution décroissante.*

Remarque 2.3. *Dans la version "temps discret" on aurait à étudier la suite définie par récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ où $g(x) = x + f(x)$. Pour savoir si cette suite est croissante ou décroissante on calcule alors $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n = f(u_n)$. A nouveau c'est le signe de $f(u_n)$ qui indique la variation de la suite.*

Il y a cependant une très grosse différence entre les équations différentielles et les suites. On a vu que dans le 1er cas le signe de $f(x(t))$ était constant et donc que la solution était soit croissante soit décroissante. Ce n'est par contre pas forcément le cas pour les suites. Par exemple, la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison -1, autrement dit $g(x) = -x \iff f(x) = -2x$ n'est ni croissante ni décroissante. En effet on a, pour tout n, $u_n = (-1)^n$ et donc $f(u_n) = -2 \times (-1)^n$ qui est positif si n est impair et négatif si n est pair.

Exemple 2.7. *La fonction $f(x) = x^2$ est toujours positive, on en déduit qu'une solution de l'équation $x'(t) = x(t)^2$ est toujours une fonction croissante.*

On peut d'ailleurs le vérifier à l'aide de la formule explicite (2.3). On a $x(t) = \dfrac{x_0}{1 - x_0 t}$ donc $x'(t) = \dfrac{x_0^2}{(1 - x_0 t)^2} \geq 0$.

Exemple 2.8. *On étudie facilement le signe de la fonction $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{M}\right)$.*

x	$-\infty$		0		M		$+\infty$
rx		$-$	0	$+$		$+$	
$1 - \frac{x}{M}$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que si $x_0 \in]0, M[$ la solution de l'équation $x'(t) = f(x(t))$ avec $x(0) = x_0$ est une fonction strictement croissante, et que sinon elle est décroissante.

On peut d'ailleurs le vérifier à l'aide de (2.5). En effet, on a $x(t) = \dfrac{M}{1 + \frac{M - x_0}{x_0}\mathrm{e}^{-rt}}$ donc $x'(t) = \dfrac{Mr \times \frac{M - x_0}{x_0}\mathrm{e}^{-rt}}{\left(1 + \frac{M - x_0}{x_0}\mathrm{e}^{-rt}\right)^2}$. Comme M, r et e^{-rt} sont positifs, le signe de $x'(t)$ ne dépend que de celui de $\frac{M - x_0}{x_0}$. Ce dernier est strictement positif si et seulement si $x_0 \in]0, M[$.

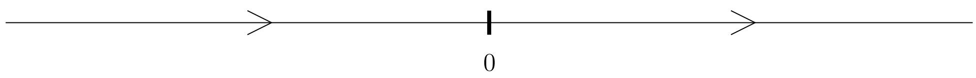
Comme on l'a vu ci-dessus, si $x(t)$ est solution de $x'(t) = f(x(t))$ alors le signe de $f(x(t))$ est toujours le même. Ici, ca signifie que le signe de $x(t) \times \left(1 - \frac{x(t)}{M}\right)$ est toujours le même.

Par ailleurs la quantité $\frac{x(t)}{M-x(t)}$ *a le même signe que* $f(x(t))$ *(faire les tableaux de signes correspondant). En particulier* $\dfrac{x(t)}{M-x(t)}$ *et* $\dfrac{x_0}{M-x_0}$ *ont toujours le même signe. Comme* e^{-rt} *est toujours positif, on en déduit que* $\dfrac{x(t)}{M-x(t)}$ *et* $\dfrac{x_0}{M-x_0}\mathrm{e}^{-rt}$ *ont nécessairement le même signe. Cela justifie qu'on ait pu enlever les valeurs absolues dans l'équation (2.4).*

2.3.2 Représentation graphique

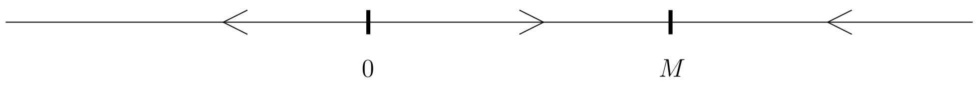
On a vu que le sens de variation d'une solution de l'équation $x'(t) = f(x(t))$ ne dépendait que de la valeur de $f(x_0)$. On fait alors un tableau de signe de la fonction f. Sur un axe on place les solutions de l'équation $f(x) = 0$, et entre 2 solutions on indique par une flèche orientée vers la droite lorsque les solutions de l'équation sont croissantes, i.e. là où f est positive, et une flèche vers la gauche lorsque les solutions sont décroissantes, i.e. là où f est négative.

Exemple 2.9. *Pour la fonction* $f(x) = x^2$ *de l'exemple 2.3 on obtient le graphe suivant*



On a indiqué la solution stationnaire $x(t) \equiv 0$ *et pour les autres valeurs de* x_0 *(négatif ou positif) on indique à l'aide d'une flèche vers la droite que la solution sera croissante.*

Exemple 2.10. *Pour la fonction* $f(x) = rx\left(1 - \dfrac{x}{M}\right)$ *de l'exemple 2.4 on obtient le graphe suivant*



On a indiqué les deux solutions stationnaires $x(t) \equiv 0$ *et* $x(t) \equiv M$*, si* $x_0 \in]0, M[$ *la solution est croissante ce qu'on indique avec une flèche vers la droite, et si* $x_0 < 0$ *ou* $x_0 > M$ *la solution est décroissante ce qu'on indique avec une flèche vers la gauche.*

2.3.3 Limite de la solution

On a vu que les solutions étaient soient croissantes, soient décroissantes. Si on a une fonction croissante, tout comme pour les suites, soit elle est majorée par un nombre M et alors elle a une limite $\ell \leq M$, soit elle ne l'est pas et alors elle tend vers $+\infty$. Inversement, si on a une fonction décroissante, soit elle est minorée par un nombre m et alors elle a une limite $\ell \geq m$, soit elle ne l'est pas et alors elle tend vers $-\infty$.

Considérons l'exemple de l'équation $x'(t) = x(t)^2$. La représentation graphique des solutions présentée ci-dessus laisse à penser que que si $x_0 < 0$ la solution sera croissante jusquà 0 (elle ne peut pas atteindre 0 comme on l'a vu : soit $f(x(t)) = x(t)^2$ est toujours nul soit il ne l'est jamais) et que si $x_0 > 0$ elle sera croissante jusqu'à l'infini. On peut le vérifier à l'aide de l'expression obtenue pour $x(t)$. On a $x(t) = \dfrac{x_0}{1 - x_0 t}$. Si $x_0 < 0$ la solution est définie sur $[0, +\infty[$ (voir Exemple 2.5) et on a bien $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{x_0}{1 - x_0 t} = 0$. Par contre si $x_0 > 0$ la solution est définie sur $\left[0, \dfrac{1}{x_0}\right[$ (voir Exemple 2.5) et on a bien $\lim\limits_{t \to (\frac{1}{x_0})^-} \dfrac{x_0}{1 - x_0 t} = +\infty$.

Ce qu'on observe dans ce cas est en fait plus général. On peut montrer la proposition suivante.

Proposition 2.5. *Soit $x(t)$ la solution de l'équation $x'(t) = f(x(t))$ avec $x(0) = x_0$.*

i) Si $f(x_0) > 0$, alors la solution est croissante. De plus, soit il existe une solution stationnaire supérieure à x_0, i.e. il existe x_* tel que $x_0 < x_*$ et $f(x_*) = 0$, et alors $x(t)$ est définie sur $[0, +\infty[$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = x_\infty$ où x_∞ est la plus petite solution stationnaire supérieure à x_0, soit il n'y a pas de solution stationnaire supérieure à x_0 et alors $\lim\limits_{t \to T} x(t) = +\infty$. Dans ce dernier cas T peut être soit fini soit $+\infty$.

ii) Si $f(x_0) < 0$, alors la solution est décroissante. De plus, soit il existe une solution stationnaire inférieure à x_0, i.e. il existe x_* tel que $x_0 > x_*$ et $f(x_*) = 0$, et alors $x(t)$ est définie sur $[0, +\infty[$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = x_\infty$ où x_∞ est la plus grande solution stationnaire inférieure à x_0, soit il n'y a pas de solution stationnaire supérieure à x_0 et alors $\lim\limits_{t \to T} x(t) = -\infty$. Dans ce dernier cas T peut être soit fini soit $+\infty$.

Exemple 2.11. *Reprenons l'équation $x'(t) = x(t)^2$. Pour tout $x_0 \neq 0$ on a une solution strictement croissante. Si $x_0 < 0$ il y a une seule solution stationnaire supérieure à x_0 (la solution nulle), donc la fonction $x(t)$ est définie sur $[0, +\infty[$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$. Par contre si $x_0 > 0$ il n'y a pas de solution stationnaire supérieure à x_0 donc $\lim\limits_{t \to T} x(t) = +\infty$. Ici on a vu que $T = \dfrac{1}{x_0}$ était fini.*

Exemple 2.12. *Reprenons cette fois le modèle de Verhulst, $x'(t) = rx(t)\left(1 - \dfrac{x(t)}{M}\right)$, dont les solutions stationnaires sont 0 et M.*

- *Si $x_0 < 0$, la solution est strictement décroissante. Il n'y a pas de solution stationnaire inférieure à x_0, donc $\lim\limits_{t \to T} x(t) = -\infty$. À nouveau ici $T = -\dfrac{1}{r} \ln\left(\dfrac{x_0}{x_0 - M}\right)$ est fini.*
- *Si $0 < x_0 < M$, la solution est strictement croissante. Il y a une solution stationnaire supérieure à x_0 (la solution constante égale à M), donc la solution est définie sur $[0, +\infty[$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = M$.*
- *Si $x_0 > M$, la solution est strictement décroissante. Il y a une solution stationnaire inférieure à x_0 (il y en a même 2, les fonctions constantes égales à 0 ou à M), donc la solution est définie sur $[0, +\infty[$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = M$ (la plus grande solution stationnaire inférieure à x_0).*

Exercice : vérifier les propriétés ci-dessus à l'aide de l'expression (2.5).

Si on revient à l'idée que l'on décrit ici l'évolution d'une population, alors nécessairement $x_0 \geq 0$. On voit alors que, mise à part la solution stationnaire 0, quelque soit la valeur initiale x_0 la solution tend vers M : la population va se stabiliser à la valeur M (la capacité d'accueil) soit en croissant si on part d'une population inférieure, soit en décroissant si on part d'une population supérieure.

Remarque 2.4. *Les exemples ci-dessus pourraient laisser croire que lorsque la solution tend vers $\pm\infty$ alors le temps maximal T est fini. Il n'en est rien. Par exemple si on prend l'équation $x'(t) = x(t)$ donc la solution est $x(t) = x_0 e^t$, on remarque que celle-ci est bien définie sur $[0, +\infty[$ et que, pour $x_0 > 0$, on a $\lim_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$.*

2.3.4 Stabilité des solutions stationnaires

Pour terminer ce chapitre on va revenir sur la notion de stabilité d'une solution stationnaire. Celle-ci est semblable à celle qu'on a donnée pour les suites : une solution stationnaire sera dite *stable* si lorsque x_0 est proche d'une solution stationnaire alors la fonction $x(t)$ reste proche de celle-ci et elle sera instable sinon. La question est bien entendu : "Comment décider si une solution stationnaire est stable ou instable ?"

L'étude qualitative effectuée dans les sections précédentes nous donnent toutes les informations nécessaires. Prenons une solution stationnaire x_*. Si $x_0 > x_*$ est proche de x_*, pour que $x(t)$ en reste proche il faut que la solution soit décroissante, c'est-à-dire $f(x_0) < 0$. Inversement si $x_0 < x_*$ est proche de x_*, pour que $x(t)$ en reste proche il faut que la solution soit croissante, c'est-à-dire $f(x_0) > 0$. Autrement dit, on sait que $f(x_*) = 0$ (c'est une solution stationnaire), et pour que celle-ci soit stable il faut et il suffit que f soit positive juste en dessous de x_* et négative juste au dessus : près de x_* la fonction f doit être décroissante (elle passe de positif à négatif). Une façon simple de s'en assurer est de calculer $f'(x_*)$:

> Si $f'(x_*) < 0$ la fonction f sera bien décroissante près de x_* et donc x_* sera une solution stationnaire stable. Si $f'(x_*) > 0$ la solution stationnaire sera instable. Comme pour les suites, la valeur limite $f'(x_*) = 0$ ne permet pas de conclure (la fonction f peut alors être aussi bien croissante que décroissante, ex : $f(x) = x^3$ est croissante alors $f(x) = -x^3$ est décroissante).

Exemple 2.13. *Pour le modèle de Verhulst on a vu que n'importe quelle solution (pour $x_0 > 0$) tendait vers la solution stationnaire M. Autrement dit, la solution stationnaire constante égale à M est plutôt stable alors que celle constante égale à 0 ne l'est pas. On peut ici calculer $f'(x) = r\left(1 - \frac{2x}{M}\right)$. On a $f'(0) = r > 0$ ce qui confirme que 0 est instable alors que $f'(M) = -r < 0$ ce qui confirme que M est stable.*

Pour justifier le critère de stabilité ci-dessus on aurait aussi pu raisonner comme pour les suites. Étant donnée une solution stationnaire x_*, lorsque $x(t)$ est proche de x_* on peut approcher la fonction f par sa tangente et écrire

$$x'(t) = f(x(t)) \simeq f(x_*) + f'(x_*) \times (x(t) - x_*).$$

Puisque x_* est une solution stationnaire on a $f(x_*) = 0$ et donc $x'(t) \simeq f'(x_*) \times (x(t) - x_*)$. La fonction $y(t) = x(t) - x_*$ a pour dérivée $y'(t) = x'(t)$ et vérifie donc approximativement l'équation linéaire du 1er ordre $y'(t) = f'(x_*) \times y(t)$. Dire que $x(t)$ reste proche de x_* revient à dire que $y(t)$ reste proche de 0. Or la solution de cette équation est $y_0 e^{tf'(x_*)}$ qui ne tend vers 0 que si $f'(x_*) < 0$ et au contraire augmente (en valeur absolue) si $f'(x_*) > 0$.

Chapitre 3

Fonctions de deux variables

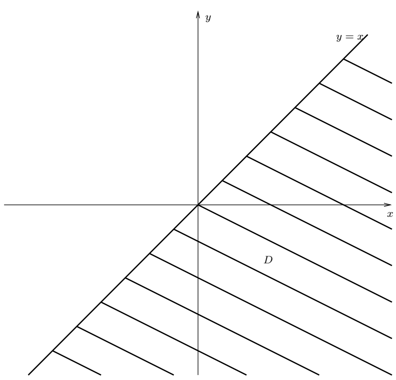
3.1 Définitions. Représentation graphique

On rappelle que $\mathbb{R}^2$ note l'ensemble $\{(x, y) \,|\, x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$. Graphiquement on représente l'élément $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par le point M de coordonnées (x, y). On s'intéresse à des fonctions f qui dépendent de deux variables x et y.

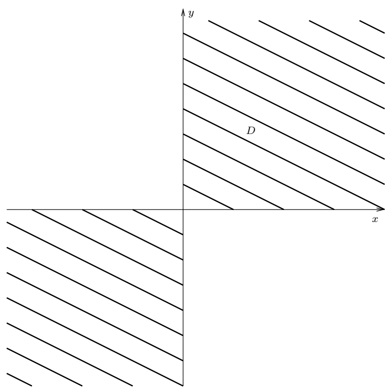
Définition 3.1. *Une fonction de deux variables est une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est le domaine de définition de f. Si $(x, y) \in D$, on note $f(x, y)$ la valeur de la fonction f en ce point.*

Exemple 3.1. *a) La fonction $f(x, y) = \sqrt{x - y}$ est définie si et seulement si $x - y \geq 0$, i.e. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq y\}$.*

b) La fonction $g(x, y) = \ln(xy)$ est définie si et seulement si $xy > 0$, i.e. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x > 0 \text{ et } y > 0) \text{ ou } (x < 0 \text{ et } y < 0)\}$.



Domaine de f



Domaine de g

Définition 3.2. *Si $k \in \mathbb{R}$, la courbe de niveau k de la fonction f est $\mathcal{C}_k = \{(x, y) \in D \,|\, f(x, y) = k\}$, l'ensemble des points en lesquels f prend la valeur k.*

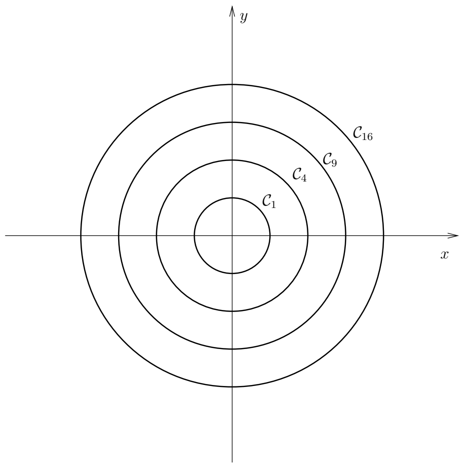
Exemple 3.2. *a) Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$ définie sur $D = \mathbb{R}^2$. La courbe de niveau k est l'ensemble des (x, y) tels que que $x^2 + y^2 = k$. On en déduit que $\mathcal{C}_k$ est*

– *vide si $k < 0$,*

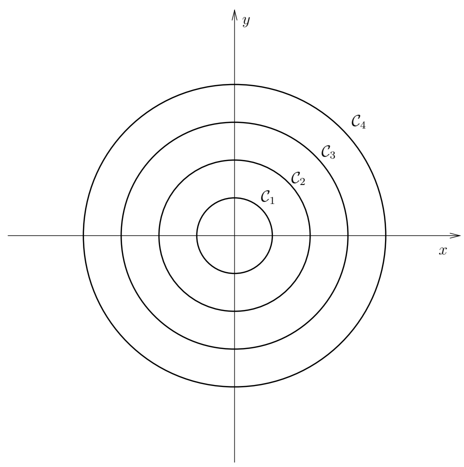
– *le point* $\{O = (0,0)\}$ *si* $k = 0$,
– *le cercle de centre* O *et de rayon* $\sqrt{k}$ *si* $k > 0$.

b) Soit $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ *définie sur* $D = \mathbb{R}^2$. *La courbe de niveau* k *est l'ensemble des* (x, y) *tels que que* $\sqrt{x^2 + y^2} = k$. *On en déduit que* $\mathcal{C}_k$ *est*

– *vide si* $k < 0$,
– *le point* $\{O = (0,0)\}$ *si* $k = 0$,
– *le cercle de centre* O *et de rayon* k *si* $k > 0$.



Courbes de niveaux de f



Courbes de niveaux de g

Sur une carte IGN les courbes de niveaux tracées correspondent à la fonction altitude : la courbe de niveau 50 correspond à l'ensemble des points dont l'altitude est de 50 mètres. Si on se déplace le long d'une telle courbe, on ne monte ni ne descend.

De façon similaire au graphe d'une fonction f d'une seule variable qui est une courbe dans le plan, on définit celui d'une fonction de deux variables.

Définition 3.3. *Le graphe d'une fonction de deux variables* f *est*

$$\mathcal{S}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in D \text{ et } z = f(x, y)\}.$$

C'est une surface dans l'espace.

3.2 Dérivées partielles et utilisation graphique

3.2.1 Dérivées partielles

Si f est une fonction d'une seule variable, on rappelle que la dérivée de f au point x_0 est, par définition et si elle existe, la quantité $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Définition 3.4. *1) On appelle dérivée partielle de* f *par rapport à* x *en* (x_0, y_0), *notée* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, *la quantité définie par*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

2) De même, on appelle dérivée partielle de f par rapport à y en (x_0, y_0), notée $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, la quantité définie par

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ l'idée est de considérer que y n'est pas une variable mais une constante et on fait comme si f ne dépendait que de x. De même, pour calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$ on considère que x n'est pas une variable mais une constante et on fait comme si f ne dépendait que de y.

Exemple 3.3. *Soit f la fonction définie par $f(x, y) = x^2y^3$. Essayons de calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$. On considère donc que y est une constante et seul x varie. La dérivée de la fonction $g(x) = 2x^2$ est $g'(x) = 2 \times 2x = 4x$, celle de $h(x) = 5x^2$ est $h'(x) = 5 \times 2x$. Ici on aura donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^3 \times 2x = 2xy^3$.*

Sur le même principe, la dérivée de la fonction $g(y) = 2y^3$ est $g'(y) = 2 \times 3y^2 = 6y^2$, celle de $h(y) = 7y^3$ est $h'(y) = 7 \times 3y^2 = 21y^2$, et trouve donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 \times 3y^2 = 3x^2y^2$.

Les formules de calcul (somme, produit, quotient) sont alors les même que pour les fonctions d'une variable :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(f+g)}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \\
\frac{\partial(f \times g)}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times g(x, y) + f(x, y) \times \frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \\
\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x}(x, y) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times g(x, y) - f(x, y) \times \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)}{(g(x, y))^2},
\end{aligned}$$

et on a les formules équivalentes pour les dérivées partielles par rapport à la variable y (il suffit de remplacer partout ∂x par ∂y).

Exemple 3.4. *Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ par $f(x, y) = x^2y^3 + 2x\sin(x)\ln(y)$. On calcule alors*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^3 + 2\sin(x)\ln(y) + 2x\cos(x)\ln(y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2 + \frac{2x\sin(x)}{y}.$$

Regardons maintenant ce que devient la formule de dérivation pour les fonctions composées. On rappelle que pour des fonctions d'une variable on a $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g' \circ f(x)$. Par exemple, la dérivée de la fonction $h(x) = \cos(x^2)$ est $h'(x) = -2x\sin(x^2)$. C'est l'application de la formule précédente avec $f(x) = x^2$ et $g(x) = \cos(x)$. Pour les fonctions de 2 variables la complication vient du fait qu'il y a deux situations à considérer. Avant de penser à dériver une composée il faut d'abord que cette dernière ait un sens : on ne peut pas composer une fonction de 2 variables avec une autre fonction de 2 variables. La composée $g \circ f(x)$ signifie qu'on applique d'abord la fonction f au nombre x, puis la fonction g au nombre $f(x)$:

$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x) \overset{g}{\longmapsto} g(f(x)) = g \circ f(x).$$

Si f est une fonction de 2 variables x et y, la valeur de f est un nombre et on ne peut donc pas appliquer une autre fonction de 2 variables mais seulement une fonction d'une variable :

$$(x, y) \overset{f}{\longmapsto} f(x, y) \overset{g}{\longmapsto} g(f(x, y)) = g \circ f(x, y).$$

On a composé une fonction de 2 variables, f, avec une fonction d'une seule variable, g, et on obtient une fonction de 2 variables, $g \circ f$. La formule de dérivation découle directement de celle que l'on a pour les fonctions d'une variable et s'écrit alors

$$\frac{\partial\, g \circ f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times g' \circ f(x, y), \quad \frac{\partial\, g \circ f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \times g' \circ f(x, y).$$

Exemple 3.5. *Les dérivées partielles de la fonction* $h(x, y) = \sin(x^2y^3)$ *sont* $\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 2xy^3 \cos(x^2y^3)$ *et* $\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2 \cos(x^2y^3)$. *C'est l'application des formules précédentes avec* $f(x, y) = x^2y^3$ *et* $g(x) = \sin(x)$.

Si on veut composer en terminant par une fonction de 2 variables f, il faut au départ non pas une mais 2 fonctions u et v :

$$t \overset{u,v}{\longmapsto} (u(t), v(t)) \overset{f}{\longmapsto} f(u(t), v(t)) = g(t).$$

On a composé 2 fonctions d'une variable, u et v, avec une fonction de 2 variables, f, et on obtient une fonction d'une variable, g. La formule de dérivation n'est plus aussi immédiate. On admettra que la dérivée de la fonction $g(t) = f(u(t), v(t))$ est

$$\boxed{g'(t) = u'(t) \times \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t) \times \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t)).}$$

Exemple 3.6. *Prenons* $f(x, y) = x^2y^3$, $u(t) = \sin(t)$ *et* $v(t) = \mathrm{e}^t$. *On a alors* $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2$, $u'(t) = \cos(t)$ *et* $v'(t) = \mathrm{e}^t$. *On en déduit que la dérivée de la fonction* $g(t) = f(u(t), v(t)) = (\sin(t))^2(\mathrm{e}^t)^3$ *est* $g'(t) = 2\sin(t)(\mathrm{e}^t)^3 \times \cos(t) + 3(\sin(t))^2(\mathrm{e}^t)^2 \times \mathrm{e}^t$.

3.2.2 Plan tangent. Vecteur gradient

On rappelle que, si f est une fonction dérivable d'une variable, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite T_a d'équation $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$. C'est la droite qui approche le mieux la courbe près du point $M_a(a, f(a))$, elle passe par ce point et a pour pente $f'(a)$.

Le graphe d'une fonction de 2 est variable n'est plus une courbe mais une surface et la droite tangente est alors remplacée par un *plan tangent*. L'équation d'un plan (non vertical) dans l'espace est de la forme $z = ax + by + c$. Le plan tangent à la surface $\mathcal{S}_f$ au point $M(a, b, f(a, b))$ est alors le plan qui approche le mieux la surface près de ce point. Il a pour équation

$$P_{(a,b)} :\ z = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \times (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \times (y - b) + f(a, b).$$

Il passe par M et a pour pentes $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ dans la direction x et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ dans la direction y.

Exemple 3.7. *Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + 2y^2$. Le point de la surface $\mathcal{S}_f$ de coordonnées $(1, 2)$ est $M(1, 2, 9)$ puisque $f(1, 2) = 9$. Par ailleurs $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y$ donc $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 8$. Le plan tangent à $\mathcal{S}_f$ en ce point est $P_{(1,2)} :\ z = 2(x - 1) + 4(y - 2) + 9$.*

En partant du point $M(a, b, f(a, b))$, plutôt que de se déplacer dans la direction x ou la direction y on pourrait choisir de se déplacer dans une direction donnée $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$. Quelle est alors la pente dans cette direction ?

Se déplacer dans la direction $\vec{v}$ signifie qu'on se déplace sur la surface $\mathcal{S}_f$ uniquement sur des points $M'(x, y, f(x, y))$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires, i.e. $\overrightarrow{MM'} = t\vec{v}$ où $t \in \mathbb{R}$. Autrement dit on ne considère que des points tels que $x = a + tv_x$ et $y = b + tv_y$. Une autre façon de voir est la suivante :

1. on coupe la surface $\mathcal{S}_f$ par le plan vertical passant par M et dirigé par $\vec{v}$, i.e. le plan $P = (M, \overrightarrow{Oz}, \vec{v})$.
2. on obtient alors une courbe dont l'équation dans le plan P est le graphe de la fonction $g(t) = f(a + tv_x, b + tv_y)$.
3. lorsque $t = 0$ on est précisément au point M, la pente dans la direction $\vec{v}$ est donc donnée par $g'(0)$.

Pour calculer $g'(0)$ on utilise la seconde formule de dérivation des fonctions composées avec $u(t) = a + tv_x$ et $v(t) = b + tv_y$. On obtient $g'(0) = v_x \times \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + v_y \times \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

Proposition 3.5. *La pente de la surface au point $M(a, b, f(a, b))$ dans la direction $\vec{v}$ vaut $f'_{\vec{v}}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)v_y$. Ce nombre est appelé la dérivée de f au point (a, b) dans la direction $\vec{v}$.*

Exemple 3.8. *La dérivée de la fonction $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ au point $(1, 2)$ dans la direction $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vaut $f'_{\vec{v}}(1, 2) = 2 \times 1 + 8 \times 1 = 10$.*

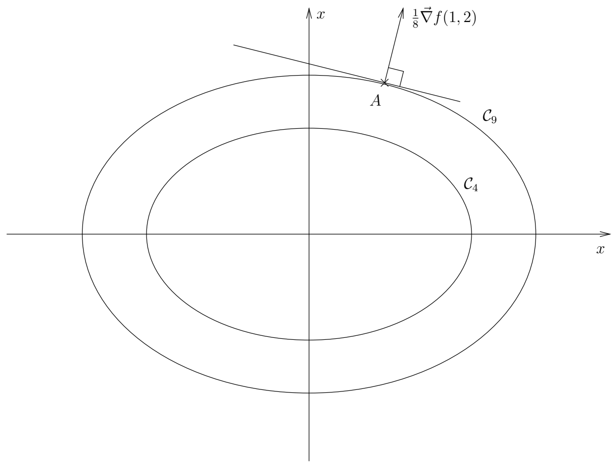
Définition 3.6. *Le vecteur de coordonnées $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ est noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a, b)$ ou $\overrightarrow{\nabla} f(a, b)$ et s'appelle le vecteur gradient de f au point (a, b), i.e. $\overrightarrow{\nabla} f(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix}$.*

On peut remarquer la dérivée de f au point (a,b) dans la direction $\vec{v}$ s'écrit à l'aide du vecteur gradient
$$f'_{\vec{v}}(a,b) = \overrightarrow{\nabla} f(a,b) \cdot \vec{v}.$$

Proposition 3.7. *1) Le vecteur $\overrightarrow{\nabla} f(a,b)$ indique la direction de plus grande pente sur la surface $\mathcal{S}_f$ au point (a,b).*

2) Le vecteur $\overrightarrow{\nabla} f(a,b)$ est un vecteur normal à la courbe de niveau $\mathcal{C}_{f(a,b)}$ au point (a,b) et pointe dans la direction où f croit.

Exemple 3.9. *Le vecteur gradient de la fonction $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ au point $A(1,2)$ est le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ et il est normal à la courbe $\mathcal{C}_9$ au point A.*



Chapitre 4

Introduction au calcul matriciel

4.1 Définition et opérations élémentaires

4.1.1 Définition et exemples

Définition 4.1. *Une matrice de taille $n \times m$ est un tableau de nombres à n lignes et m colonnes.*

Exemple 4.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ *est une matrice* 3×2*, et* $B = \begin{pmatrix} 1 & \pi & \sqrt{2} & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *est une matrice* 2×4.

Lorsqu'une matrice a autant de lignes que de colonnes, i.e. $n = m$, on parle de matrice carrée. On les utilise dans des situations variées :

1. Les systèmes d'équations à plusieurs inconnues. Par exemple, au système de 2 équations à 2 inconnues $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 1 \\ -3x + 7y & = & 2 \end{array} \right.$ est associée la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ de taille 2×2.
2. Les systèmes de suites définies par récurrence. Par exemple, au système de 3 suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ définies par $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} u_{n+1} & = & 2u_n & + & v_n & - & 3w_n \\ v_{n+1} & = & -u_n & + & 3v_n & + & w_n \\ w_{n+1} & = & -u_n & + & 5v_n & & \end{array} \right.$ on associe la matrice carrée $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ de taille 3×3.
3. Les systèmes d'équations différentielles du 1er ordre. Par exemple au système $\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 2x(t) - y(t) \\ y'(t) & = & x(t) + 3y(t) \end{array} \right.$ on associe la matrice carrée $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ de taille 2×2.
4. Certaines transformations géométriques. À la rotation de centre O et d'angle θ est associée la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

On verra par la suite comment passer d'un système à la matrice qui lui est associée.

✎ **Notation.** La notation générique pour une matrice A de taille $n \times m$ est

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.1. *Lorsqu'une matrice n'a qu'une seule colonne on parle parfois de vecteur au lieu de matrice.*

4.1.2 Opérations élémentaires

• **Multiplication par un nombre.** Si A est une matrice de taille $n \times m$ et k est un nombre (réel ou même complexe) alors la matrice kA est une matrice de taille $n \times m$ dont les coefficients sont obtenus en multipliant ceux de A par le nombre k :

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nm} \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.2. *Si* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ *alors* $3A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & -3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$.

• **Addition de 2 matrices.** La somme de deux matrices A et B n'est possible que si celles-ci ont la même taille $n \times m$. La matrice $A + B$ est alors également de taille $n \times m$ et ses coefficients sont obtenus en additionnant "terme à terme" ceux de A et B :

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.3. *Si* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *alors* $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

• **Multiplication de 2 matrices.** Le produit de la matrice A par la matrice B (dans cet ordre !) n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. La matrice $A \times B$, ou AB, possède alors le même nombre de lignes que A et le même nombre de colonnes que B. Autrement dit, si A est une matrice de taille $n \times m$ et B une matrice de taille $p \times q$, on peut multiplier A par B uniquement si $m = p$ et le produit AB est alors une matrice de $n \times q$. Le calcul du coefficients c_{ij} de la matrice $C = AB$ se calcule alors comme le "produit scalaire" entre la i-ème ligne de A et la j-ème colonne de B. La i-ème ligne de A est $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \end{pmatrix}$ et la j-ème colonne de B est $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}$, d'où

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}.$$

Exemple 4.4. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 \\ -3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. *La matrice A a 3 colonnes (et 2 lignes) et la matrice B a 3 lignes (et 4 colonnes), on peut donc les multiplier. Leur produit AB a alors 2 lignes et 4 colonnes et on trouve* $AB = \begin{pmatrix} 6 & 25 & 2 & 18 \\ -2 & -3 & 0 & 11 \end{pmatrix}$. *Par exemple, pour calculer le coefficient qui se trouve sur la 1ère ligne et 2ème colonne de AB on a effectué le "produit scalaire" entre la 1ère ligne de A et la 2ème colonne de B :*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \times 4 + (-1) \times (-1) + 2 \times 6 = 25.$$

Si la multiplication par un nombre et l'addition de 2 matrices semblent assez naturelles, leur produit en revanche peut paraitre étrange au premier abord. Pourquoi un produit si "bizarre" et non pas une définition semblable à celle pour l'addition ? Il y a bien sur des raisons beaucoup plus profondes que celle que l'on va donner ici, mais dans le cadre de ce cours on se contentera de la raison suivante : parceque c'est celui-là qui sert ! Pour voir cela, reprenons les 4 applications de la section précédente.

1. Les systèmes d'équations à plusieurs inconnues. Si on note $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors le système se réécrit sous la forme $AX = B$. Au lieu d'un système on a une seule équation à une seule inconnue et on a envie d'écrire $X = \dfrac{B}{A}$. On verra plus loin que diviser des matrices n'est pas si simple et on écrira plutôt, après avoir donné un sens à l'inverse A^{-1} de A, $X = A^{-1}B$.
2. Les systèmes de suites définies par récurrence. Si on note $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout n, U_n la matrice de taille 3×1 donnée par $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, alors le système se réécrit sous la forme $U_{n+1} = AU_n$. On se ramène ainsi à une "suite géométrique" est on va alors écrire $U_n = A^n \times U_0$.

3. Les systèmes d'équations différentielles du 1er ordre. Si on note $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, le système se réécrit alors $X'(t) = A \times X(t)$. On se ramène à une "équation différentielle du premier ordre à coefficients constants" et on a envie d'écrire $X(t) = \mathrm{e}^{tA}X(0)$. Il faudrait pour cela donner un sens à l'exponentielle d'une matrice, ce qui est possible mais que l'on ne fera pas ici. On verra dans le Chapitre 5, Section 5.2, comment contourner cette question.
4. Certaines transformations géométriques. Si on note $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, l'image du vecteur V (on a utilisé ici l'identification entre matrices à 1 colonnes et vecteurs) par la rotation de centre O et d'angle θ est le vecteur $R_\theta V$ où $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

4.1.3 Propriétés des opérations élémentaires. Matrice inversible

La plupart des propriétés des opérations sur les matrices sont les même que pour les nombres à partir du moment où l'opération considérée à un sens, c'est-à-dire si les tailles des matrices correspondent.

1. Associativité de l'addition. Si A, B et C sont trois matrices de taille $n \times m$ alors $A + (B + C) = (A + B) + C$.
2. Commutativité de l'addition. Si A et B sont deux matrices de taille $n \times m$ alors $A + B = B + A$.
3. Associativité de la multiplication. Si A, B et C sont trois matrices telles que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B et le nombre de colonnes de B soit égal au nombre de lignes de C, alors $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
4. La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Si B et C ont même taille et si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B (et donc de C) alors $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$. De même si A et B ont même taille et si le nombre de colonnes de A (et donc de B) est égal au nombre de lignes de C alors $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$.
5. L'associativité, la commutativité et la distributivité du produit avec un nombre. Si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B et si k est un nombre alors $(kA) \times B = A \times (kB) = k(A \times B)$. Si A et B ont même taille et k est un nombre alors $k(A + B) = kA + kB$.

Attention ! Le produit de deux matrices A et B n'est pas commutatif (en général).

1. Souvent seul l'un des deux produits AB ou BA a un sens. Par exemple si $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 \\ -3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, A possède autant de colonnes que B a de lignes donc AB a un sens, par contre B a 4 colonnes alors que A n'a que 2 lignes donc le produit BA n'a pas de sens.

2. Il se peut que les deux produits aient un sens mais que les matrices AB et BA n'aient alors pas la même taille. Elles ne pourront donc pas être égales. Par exemple si $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ alors $AB = \begin{pmatrix} 6 & 25 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 2×2 tandis que $BA = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -10 & 2 & -5 \\ 6 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 3×3.
3. Même si les deux produits ont un sens et que les matrices AB et BA ont même taille elles sont en général différentes. Par exemple si $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ alors $AB = \begin{pmatrix} 6 & 13 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ mais $BA = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}$.

✎ **Notation.** On notera O_{nm}, appelée matrice nulle, la matrice de taille $n \times m$ dont tous les coefficients sont nuls. Lorsque $n = m$ on notera simplement O_n et s'il n'y a pas d'ambiguité sur la taille de la matrice on notera simplement O.

On notera I_n, appelée matrice identité, la matrice de taille $n \times n$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale qui valent 1 : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ces deux matrices jouent le même rôle que 0 et 1 pour les nombres. Si A est de taille $n \times m$ alors

– $A + O_{nm} = O_{nm} + A = A$,
– $A \times O_{mp} = O_{np}$ et $O_{pn} \times A = O_{pm}$,
– $A \times I_m = A$ et $I_n \times A = A$.

Attention ! Si A est de taille $n \times m$ et B de taille $m \times p$ (pour que le produit AB ait un sens), ce n'est pas parceque AB est la matrice nulle que soit A soit B est la matrice nulle. En d'autres termes l'expression "un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul" n'est plus vraie pour des matrices.

Exemple 4.5. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ *alors* $AB = O_2$.

Définition 4.2. *Si A est une matrice carrée $n \times n$ on dit que A est inversible, ou bien que A admet un inverse, s'il existe une matrice B de taille $n \times n$ telle que $AB = BA = I_n$. Si elle existe, on note A^{-1} cette matrice et on l'appelle l'inverse de A.*

Exemple 4.6. *Si A est une matrice diagonale (seuls les éléments sur la diagonale sont différents de zéro), elle est inversible si et seulement si tous les éléments de la diagonale sont non nuls et A^{-1} est la matrice diagonale dont les coefficients sont les inverses de ceux de A. Par exemple* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ *est inversible et* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$.

Application : On souhaite résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcr} 2x+y+z & = & -1 \\ x+2y+z & = & 3 \\ x+y+2z & = & 2 \end{array}\right.$. On réécrit ce système sous la forme de l'équation $AX = B$ d'inconnue X où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. On peut vérifier que la matrice A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Puisque $AX = B$, on peut multiplier les 2 membres de cette équation par A^{-1}. Attention le A^{-1} doit être mis à gauche pour que le produit ait un sens : $A^{-1} \times (AX) = A^{-1}B$. En utilisant ensuite l'associativité du produit on a $A^{-1}B = A^{-1} \times (AX) = (A^{-1}A) \times X = I_3 \times X = X$. On a ainsi $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (on retrouve l'idée que $X = \frac{B}{A}$), c'est-à-dire l'ensemble des solutions du système est $S = \{(-2, 2, 1)\}$.

4.2 Étude des matrices 2×2

Dans toute cette section on ne considèrera que des matrices de taille 2×2.

4.2.1 Déterminant et inverse

Définition 4.3. *On appelle déterminant d'une matrice* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *la quantité* $\det(A) = ad - bc$.

Proposition 4.4. *La matrice* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *admet un inverse si et seulement si* $\det(A) \neq 0$. *Dans ce cas* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exemple 4.7. *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *a pour déterminant* $\det(A) = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 1$. *Elle possède donc un inverse qui est la matrice* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ *a pour déterminant* $\det(B) = 3 \times 4 - 5 \times 2 = 2$. *Elle possède donc un inverse qui est la matrice* $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$.

Application : Le système $\left\{\begin{array}{rcr} 3x+2y & = & -2 \\ 5x+4y & = & 4 \end{array}\right.$ se réécrit $BX = Y$ avec $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. La matrice B est inversible et on peut donc écrire (voir la section précédente)

$$X = B^{-1}Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5/2 & 3/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

La solution du système est donc $x = -8$ et $y = 11$, i.e. $S = \{(-8, 11)\}$.

Exemple 4.8. *La matrice* $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *est inversible et son inverse est la matrice* $R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *: l'inverse de la rotation de centre O et d'angle θ est la rotation de centre O et d'angle $-\theta$.*

Remarque 4.2. *La proposition 4.4 reste vraie si les coefficients de la matrice sont des nombres complexes.*

4.2.2 Valeurs propres et vecteurs propres

Dans le chapitre suivant, on cherchera à étudier des systèmes de suites définies par récurrence ou d'équations différentielles. Prenons le cas des suites. On s'intéressera à des suites définies par une relation du type $\left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & f(u_n, v_n) \\ v_{n+1} & = & g(u_n, v_n) \end{array} \right.$. Un cas particulièrement important est celui correspondant aux suites géométriques (on sait les résoudre explicitement et elles apparaissent pour comprendre la stabilité des points fixes).

Comme on l'a vu précédemment, un système de suites de la forme $\left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & au_n + bv_n \\ v_{n+1} & = & cu_n + dv_n \end{array} \right.$ peut s'écrire sous la forme d'une suite géométrique $U_{n+1} = AU_n$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et on montre alors facilement que $U_n = A^n U_0$. Tout le problème revient donc à calculer A^n (ou $A^n U_0$).

Prenons par exemple le système $\left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 4u_n - 2v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + v_n \end{array} \right.$. La matrice A est ici $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On voudrait calculer A^n. Si on calcule les premiers termes, on trouve que $A^2 = \begin{pmatrix} 14 & -10 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 46 & -38 \\ 19 & -11 \end{pmatrix}$,... Les calculs deviennent vite énormes et il semble impossible de trouver/deviner une expression simple pour A^n.

Les notions de valeurs propres et vecteurs propres permettront de résoudre cette difficulté.

Définition 4.5. *Étant donnée une matrice A, un nombre λ est appelé valeur propre de la matrice A s'il existe un vecteur $V \neq 0$ tel que $AV = \lambda V$. Un tel vecteur V est alors appelé vecteur propre associé à λ.*

Remarque 4.3. *Même si la matrice A est à coefficients réels on autorise les valeurs propres à être des nombres complexes, les vecteurs propres seront dans ce cas aussi à coefficients complexes.*

Exemple 4.9. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. *On a* $AV = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2V$ *avec* $V \neq 0$, *donc le nombre* 2 *est valeur propre de* A *et* $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre de* A *associé à la valeur propre* 2.

Supposons que les données initiales de la suite forment un vecteur propre, i.e. $AU_0 = \lambda U_0$ pour un certain nombre λ. On a alors $U_1 = AU_0 = \lambda U_0$. Calculons maintenant U_2. En utilisant les propriétés des opérations sur les matrices on écrit

$$U_2 = AU_1 = A \times (\lambda U_0) = \lambda(AU_0) = \lambda \times \lambda U_0 = \lambda^2 U_0.$$

De même on a

$$U_3 = AU_2 = A \times (\lambda^2 U_0) = \lambda^2(AU_0) = \lambda^2 \times \lambda U_0 = \lambda^3 U_0,$$

et ainsi de suite on montre que $U_n = \lambda^n U_0$. Pour calculer U_n, au lieu de calculer la puissance de la matrice A, il suffit de calculer celle du nombre λ ! On verra dans le chapitre suivant comment traiter le cas où U_0 n'est pas donné par un tel vecteur.

Le problème est donc maintenant, étant donnée une matrice A, de trouver de telles valeurs propres et vecteurs propres. Dans la pratique on utilise souvent la proposition suivante.

Proposition 4.6. *Étant donnée une matrice* A, *le nombre* λ *est une valeur propre de* A *si et seulement si* λ *vérifie* $\det(A - \lambda I_2) = 0$.

Démonstration. On va montrer que si λ est valeur propre de A alors nécessairement $\det(A - \lambda I_2) = 0$, autrement dit (voir Proposition 4.4) que la matrice $B = A - \lambda I_2$ n'est pas inversible. On va raisonner par l'absurde en supposant qu'elle l'est.

Comme λ est valeur propre de A il existe un vecteur $V \neq 0$ tel que $AV = \lambda V$. On a alors $BV = (A - \lambda I_2)V = AV - \lambda I_2 V = AV - \lambda V = 0$. Si B est inversible, on a $BV = 0 \iff V = B^{-1}0 = 0$ ce qui contredit $V \neq 0$. □

Dans la pratique, on calcule le déterminant de la matrice $A - xI_2$, on tombe nécessairement sur un polynôme du second degré à coefficients réels, et les valeurs propres sont les racines de ce polynôme. Il y a donc toujours 1 (en cas de racine double et on parle alors de valeur propre double) ou 2 valeurs propres. Lorsqu'elles sont complexes, elles sont nécessairement complexes conjuguées.

Exemple 4.10. *Cherchons les valeurs propres de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *On écrit*

$$A - xI_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-x & -2 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\det(A - xI_2) = (4-x) \times (1-x) - (-2) \times 1 = x^2 - 5x + 6$. *Les valeurs propres sont les racines du polynôme* $x^2 - 5x + 6$. *On trouve que celles-ci sont* 2 *et* 3.

Pour trouver ensuite un vecteur propre $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associé, on sait qu'il doit vérifier $AV = \lambda V$. On remplace A et λ par leurs valeurs et on cherche les valeurs de x et y. On obtient un système de 2 équations à 2 inconnues. Si on n'a pas fait d'erreur sur le calcul des valeurs propres les 2 équations doivent être équivalentes (voir l'exemple ci-dessous). On en garde donc une seule. Il y a nécessairement une infinité de solutions. N'importe quelle solution autre que le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est alors un vecteur propre.

Exemple 4.11. *On reprend la matrice* $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *dont les valeurs propres sont* 2 *et* 3. *On cherche un vecteur propre* $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *associé à la valeur propre* 2. *La condition* $AV = 2V$ *s'écrit alors*

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 4x - 2y & = & 2x \\ x + y & = & 2y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 2y & = & 0 \\ x - y & = & 0 \end{array} \right. .$$

On remarque que les 2 *équations sont bien équivalentes (on passe de l'une à l'autre en multipliant ou divisant les deux membres par* 2*). Les vecteurs propres associés à la valeur propre* 2 *sont donc tous les vecteurs* $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *pour lesquels* $x = y$, *i.e. les vecteurs de la forme* $V = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ *avec* $x \neq 0$ *(pour que* $V \neq 0$*).*

Dans l'étude du système de suites $U_{n+1} = AU_n$, *si on prend comme vecteur initial* $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *on trouve que* $U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$,*... Pour un entier* n *donné on obtient* $U_n = 2^n U_0 = \begin{pmatrix} 2^n \\ 2^n \end{pmatrix}$.

De la même façon, on trouve que $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre de* A *associé à la valeur propre* 3 *si*

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 4x - 2y & = & 3x \\ x + y & = & 3y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y & = & 0 \\ x - 2y & = & 0 \end{array} \right. .$$

À nouveau les 2 *équations sont bien équivalentes (elles sont même identiques ici). Les vecteurs propres associés à la valeur propre* 3 *sont donc tous les vecteurs* $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *pour lesquels* $x = 2y$, *i.e. les vecteurs de la forme* $V = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}$ *avec* $y \neq 0$ *(pour que* $V \neq 0$*).*

Si on prend comme vecteur initial $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, *on trouve que* $U_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \end{pmatrix}$,*... Pour un entier* n *donné on obtient* $U_n = 3^n U_0 = \begin{pmatrix} 2 \times 3^n \\ 3^n \end{pmatrix}$.

4.2.3 "Diagonalisation" d'une matrice 2×2

On va voir ici comment utiliser les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice A pour transformer cette dernière et la rendre en un certain sens plus simple. Cette transformation aura pour effet de découpler, éventuellement partiellement, le système de suites ou d'équations différentielles auquel la matrice A est associée (voir Chapitre 5).

1er cas : deux valeurs propres distinctes.

On suppose que la matrice A a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2. Elles peuvent être aussi bien réelles que complexes conjuguées. On choisit alors deux vecteurs propres V_1 et V_2 associés respectivement à λ_1 et λ_2 et on note Q la matrice 2×2 dont les colonnes sont formées par V_1 et V_2 : si $V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ alors $Q = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$. De façon abrégée on notera $Q = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}$.

On calcule alors le produit AQ. En utilisant les règles de calcul sur le produit de matrices on voit facilement que AQ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs AV_1 et AV_2. Comme V_1 et V_2 sont des vecteurs propres de A on obtient que $AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 V_1 & \lambda_2 V_2 \end{pmatrix}$. Soit maintenant la matrice $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. On calcule alors facilement le produit QD et on observe que $QD = AQ$. En admettant que la matrice Q soit inversible (c'est toujours le cas), si on multiplie des deux côtés à gauche par la matrice Q^{-1} on obtient la relation $Q^{-1}AQ = D$.

Exemple 4.12. *On reprend la matrice A de l'Exemple 4.10. Ses valeurs propres sont* $\lambda_1 = 2$ *et* $\lambda_2 = 3$. *On peut prendre comme vecteurs propres associés les vecteurs* $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Soit donc* $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. *On vérifie que*

$$AQ = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = QD.$$

2nd cas : une valeur propre double.

On suppose cette fois que A a une valeur propre double λ. On choisit alors un vecteur propre V associé. Dans ce cas on ne peut pas forcément transformer A pour obtenir une matrice diagonale et on se contentera d'une matrice dite triangulaire, i.e. de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

On prend pour cela n'importe quel vecteur W qui n'est pas colinéaire (proportionnel) à V. Dans le cas des systèmes de suites on prendra par exemple $W = U_0$ (si U_0 est colinéaire à V c'est aussi un vecteur propre et on a vu ci-dessus comment calculer U_n directement dans ce cas). On peut alors montrer que $AW - \lambda W$ est colinéaire à V, i.e. $AW - \lambda W = aV$ où a est un nombre. Autrement dit $AW = aV + \lambda W$.

On définit ensuite la matrice Q dont les colonnes sont formées par V et W, i.e. $Q = \begin{pmatrix} V & W \end{pmatrix}$. Le calcul de AQ donne alors

$$AQ = \begin{pmatrix} AV & AW \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda V & aV + \lambda W \end{pmatrix}.$$

Si on note T la matrice $T = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, on constate que $QT = AQ$ et donc cette fois on a la relation $Q^{-1}AQ = T$.

Exemple 4.13. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. *On calcule* $\det(A - xI_2) = (3-x)(1-x) + 1 = x^2 - 4x + 4$. *On vérifie que* 2 *est donc valeur propre double. On cherche ensuite un vecteur propre* $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *associé. Il doit vérifier*

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + y &=& 2x \\ -x + y &=& 2y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + y &=& 0 \\ -x - y &=& 0 \end{array} \right. .$$

Les vecteurs propres sont donc de la forme $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$ *avec* $x \neq 0$, *on prend par exemple* $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On choisit maintenant W *qui n'est pas colinéaire à* V, *par exemple* $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *On calcule* $AW - 2W = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2V$. *Le nombre* a *tel que* $AW - \lambda W = aV$ *vaut ici* $a = 2$. *Si on pose* $Q = \begin{pmatrix} V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $T = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, *on peut vérifier que*

$$AQ = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = QT.$$

En conclusion on a le résultat suivant

Proposition 4.7. *1) Si* A *a deux valeurs propres distinctes* λ_1, λ_2 *et si* V_1 *et* V_2 *sont deux vecteurs propres associés, alors*

$$Q^{-1}AQ = D$$

où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ *est une matrice diagonale et* $Q = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}$ *est la matrice dont les colonnes sont formées par* V_1 *et* V_2.

2) Si A *a une valeur propre double* λ, *si* V *est un vecteurs propre associé et* W *un vecteur non colinéaire à* V, *alors*

$$Q^{-1}AQ = T$$

où $T = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *avec* a *tel que* $AW - \lambda W = aV$ *et* $Q = \begin{pmatrix} V & W \end{pmatrix}$.

En multipliant la matrice A à droite par Q et à gauche par Q^{-1} (on n'a pas eu besoin de calculer Q^{-1}) on s'est ramené soit à une matrice diagonale soit à une matrice dite triangulaire. On verra dans le chapitre suivant comment utiliser cette relation pour découpler des systèmes de suites par récurrence ou d'équations différentielles.

Attention ! Il faut bien mettre les valeurs propres et les vecteurs propres dans le même ordre ! Si dans la matrice D on met λ_1 d'abord (en haut à gauche) et λ_2 ensuite (en bas à droite), dans la matrice Q il faut mettre d'abord (à gauche) un vecteur propre correspondant à λ_1 et ensuite (à droite) un vecteur propre correspondant à λ_2.

Chapitre 5

Systèmes de suites et d'équations différentielles

5.1 Systèmes de suites définies par récurrence

5.1.1 Étude des systèmes linéaires

Les systèmes de suites par récurrence dits "linéaires" sont l'équivalent des suites géométriques. On considère ici deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par

$$\begin{cases} u_0,\ v_0 \text{ donnés,} \\ u_{n+1} = au_n + bv_n, \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n. \end{cases}$$

Comme on l'a vu dans le chapitre 4, on peut réécrire un tel système sous la forme $U_{n+1} = AU_n$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, U_0 étant donné. Ainsi on obtient $U_n = A^n U_0$ et l'objectif est de calculer $A^n U_0$.

L'idée est d'utiliser les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A et en particulier les transformations $Q^{-1}AQ = D$ ou $Q^{-1}AQ = T$ que l'on a vues dans le chapitre précédent. Les valeurs propres sont les racines d'un polynôme du 2nd degré. On va distinguer 3 cas : 2 valeurs propres réelles distinctes, 2 valeurs propres complexes conjuguées, 1 valeur propre double.

1er cas : 2 valeurs propres réelles distinctes.

On note λ_1 et λ_2 ces deux valeurs propres, et on choisit V_1 et V_2 des vecteurs propres associés. On a vu que si U_0 était un vecteur propre alors le calcul de $A^n U_0$ était beaucoup plus simple. L'idée est de se ramener à ce cas.

N'importe quel vecteur donné, en particulier U_0, peut s'écrire (de façon unique) comme combinaison de V_1 et V_2. C'est-à-dire qu'il existe a et b des nombres réels tels que $U_0 = aV_1 + bV_2$. En utilisant la distributivité du produit de matrices par rapport à l'addition on écrit alors

$$U_n = A^n U_0 = A^n(aV_1 + bV_2) = aA^n V_1 + bA^n V_2.$$

Puisque V_1 et V_2 sont des vecteurs propres de A respectivement pour les valeurs propres λ_1 et λ_2 on a $A^nV_1 = \lambda_1^n V_1$ et $A^nV_2 = \lambda_2^n V_2$. Finalement on obtient

$$U_n = a\lambda_1^n V_1 + b\lambda_2^n V_2,$$

et à partir de là on trouve des expressions pour u_n et v_n.

Exemple 5.1. *On reprend le système* $\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$*, et on choisit pour conditions initiales* $u_0 = 1$ *et* $v_0 = 0$*, i.e.* $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$*. On a calculé dans l'exemple 4.10 les valeurs propres de la matrice* A *associée au système qui sont* $\lambda_1 = 2$ *et* $\lambda_2 = 3$*, et on a trouvé dans l'exemple 4.11 les vecteurs propres correspondant. On choisit par exemple* $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$*.*

On cherche maintenant a *et* b *tels que*

$$U_0 = aV_1 + bV_2 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 1 = a + 2b \\ 0 = a + b \end{cases}.$$

On résoud ce système et on trouve que $a = -1$ *et* $b = 1$*, i.e.* $U_0 = -V_1 + V_2$*. Finalement on obtient* $U_n = -2^nV_1 + 3^nV_2 = \begin{pmatrix} -2^n + 2 \times 3^n \\ -2^n + 3^n \end{pmatrix}$*, c'est-à-dire* $u_n = 2 \times 3^n - 2^n$ *et* $v_n = 3^n - 2^n$*.*

On va maintenant revoir le calcul précédent d'une façon équivalente faisant intervenir la transformation $Q^{-1}AQ$ de la matrice A. C'est cette autre façon de voir qu'on utilisera par la suite. L'objectif est de découpler le système. Si on note $\tilde{U}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ on voit que l'expression $U_0 = aV_1 + bV_2$ peut se réécrire $U_0 = Q\tilde{U}_0 \iff \tilde{U}_0 = Q^{-1}U_0$ (Q est ici la matrice dont les colonnes sont formées par V_1 et V_2). De la même façon on définit, pour tout n, $\tilde{U}_n = Q^{-1}U_n \iff U_n = Q\tilde{U}_n$. On va chercher à calculer d'abord $\tilde{U}_n$ puis on en déduira U_n. On a

$$\tilde{U}_{n+1} = Q^{-1}U_{n+1} = Q^{-1}AU_n = Q^{-1}AQ\tilde{U}_n = D\tilde{U}_n.$$

La suite $(\tilde{U}_n)_n$ vérifie une relation similaire à $(U_n)_n$ mais où on a remplacé la matrice A par la matrice D. L'avantage est que la matrice D est diagonale ! Si on écrit $\tilde{U}_n = \begin{pmatrix} \tilde{u}_n \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix}$ alors le système correspondant à $\tilde{U}_{n+1} = D\tilde{U}_n$ est

$$\begin{cases} \tilde{u}_{n+1} = \lambda_1 \tilde{u}_n \\ \tilde{v}_{n+1} = \lambda_2 \tilde{v}_n \end{cases}.$$

Les nouvelles suites $(\tilde{u}_n)_n$ et $(\tilde{v}_n)_n$ sont des suites géométriques usuelles ! À l'aide de la transformation $D = Q^{-1}AQ$ on a “découplé” le système. On a donc $\tilde{u}_n = \tilde{u}_0 \times \lambda_1^n = a\lambda_1^n$ et $\tilde{v}_n = \tilde{v}_0 \times \lambda_2^n = b\lambda_2^n$. On revient finalement aux suites de départ en utilisant la relation $U_n = Q\tilde{U}_n$. On retrouve bien que

$$U_n = Q\tilde{U}_n = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a\lambda_1^n \\ b\lambda_2^n \end{pmatrix} = a\lambda_1^n V_1 + b\lambda_2^n V_2.$$

Le schéma pour calculer U_n est donc le suivant :

1. On calcule Q^{-1} puis $\tilde{U}_0 = Q^{-1}U_0$.
2. La suite $\tilde{U}_n = \begin{pmatrix} \tilde{u}_n \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix}$ définie par $\tilde{U}_n = Q^{-1}U_n$ vérifie
$$\tilde{U}_{n+1} = D\tilde{U}_n \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{u}_{n+1} & = & \lambda_1 \tilde{u}_n \\ \tilde{v}_{n+1} & = & \lambda_2 \tilde{v}_n \end{array} \right. ,$$
et on obtient donc $\tilde{U}_n = \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \lambda_1^n \\ \tilde{v}_0 \lambda_2^n \end{pmatrix}$.
3. On revient aux suites de départ en utilisant $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \tilde{u}_n \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix}$.

Exemple 5.2. *On reprend l'exemple précédent avec cette autre méthode. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$, et des vecteurs propres correspondant sont par exemple $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On pose alors $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\det Q = 1 \times 1 - 2 \times 1 = -1$ donc, d'après la Propostion 4.4, la matrice Q est bien inversible et on a*
$$Q^{-1} = \frac{1}{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
On calcule alors
$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} = \tilde{U}_0 = Q^{-1}U_0 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
On a donc $\tilde{u}_n = \tilde{u}_0 \lambda_1^n = -2^n$ et $\tilde{v}_n = \tilde{v}_0 \lambda_2^n = 3^n$. Finalement
$$U_n = Q\tilde{U}_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2^n \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n + 2 \times 3^n \\ -2^n + 3^n \end{pmatrix}.$$
et on retrouve $u_n = 2 \times 3^n - 2^n$ et $v_n = 3^n - 2^n$.

2ème cas : 2 valeurs propres complexes conjuguées.

Les deux valeurs propres s'écrivent cette fois $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$. On peut ensuite montrer que si $V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre (à coefficients complexes) pour λ_1 alors $V_2 = \bar{V}_1 = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre (à coefficients complexes) pour λ_2. On raisonne ensuite comme dans le cas de deux valeurs propres réelles distinctes.

Exemple 5.3. *On considère le système de suites $\left\{ \begin{array}{rcr} u_{n+1} & = & u_n + v_n \\ v_{n+1} & = & -u_n + v_n \end{array} \right.$, et on choisit pour conditions initiales $u_0 = 4$ et $v_0 = 2$, i.e. $U_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. On commence par chercher les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A associée au système.*

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$*. Donc* $A - xI_2 = \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ -1 & 1-x \end{pmatrix}$ *et* $\det(A - xI_2) = (1-x)(1-x) + 1 = x^2 - 2x + 2$*. Le discriminant de ce polynôme du 2nd degré est* $\Delta = -4 < 0$*. Il y a donc deux racines complexes conjuguées :* $1+i$ *et* $1-i$*. Conclusion, la matrice* A *a deux valeurs propres complexes :* $\lambda_1 = 1+i$ *et* $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = 1-i$*.*

On cherche ensuite $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *tel que* $AV = (1+i)V$*. On a*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1+i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & (1+i)x \\ -x+y & = & (1+i)y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} ix & = & y \\ -x & = & iy \end{array} \right. .$$

Les 2 *équations sont bien équivalentes (on passe de l'une à l'autre en multipliant ou divisant les deux membres par* i*). Les vecteurs propres associés à la valeur propre* $1+i$ *sont donc tous les vecteurs* $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *pour lesquels* $y = ix$*, i.e. les vecteurs de la forme* $\begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix}$ *avec* $x \neq 0$ *(pour que* $V \neq 0$*). On prend par exemple* $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$*. On peut alors vérifier que* $V_2 = \bar{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ *est bien vecteur propre pour* λ_2*. En effet* $AV_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ -1-i \end{pmatrix} = (1-i)V_2$*.*

On pose maintenant $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$*. On a* $\det Q = 1 \times -i - 1 \times i = -2i$ *donc*

$$Q^{-1} = \frac{1}{-2i} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{pmatrix}.$$

On calcule alors

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{v}_0 \end{pmatrix} = \tilde{U}_0 = Q^{-1} U_0 = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-i \\ 2+i \end{pmatrix}.$$

On a donc $\tilde{u}_n = \tilde{u}_0 \lambda_1^n = (2-i) \times (1+i)^n$ *et* $\tilde{v}_n = \tilde{v}_0 \lambda_2^n = (2+i) \times (1-i)^n$*. Finalement*

$$U_n = Q\tilde{U}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2-i) \times (1+i)^n \\ (2+i) \times (1-i)^n \end{pmatrix},$$

et on trouve $u_n = (2-i) \times (1+i)^n + (2+i) \times (1-i)^n$ *et* $v_n = (1+2i) \times (1+i)^n + (1-2i) \times (1-i)^n$*.*

On peut s'étonner de voir des nombres complexes apparaitre alors qu'on est parti de suites de nombres réels. En fait les quantités finales u_n *et* v_n *sont bien des nombres réels. Pour le voir, on écrit* $\lambda_1 = 1+i$ *et* $\lambda_2 = 1-i$ *sous forme trigonométrique. On a* $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ *et donc*

$$(1+i)^n = \sqrt{2}^n \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^n = \sqrt{2}^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right).$$

De même

$$\begin{aligned} (1-i)^n &= \sqrt{2}^n \left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)^n \\ &= \sqrt{2}^n \left(\cos\left(\frac{-n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-n\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right), \end{aligned}$$

et au final on trouve

$$u_n = 4\sqrt{2}^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2}^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \text{ et } v_n = 2\sqrt{2}^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 4\sqrt{2}^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

De façon générale, dans le cas de 2 valeurs propres complexes conjuguées, si on écrit celles-ci sous forme trigonométrique $\lambda_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $\lambda_2 = r(\cos\theta - i\sin\theta)$, alors les suites u_n et v_n seront de la forme $u_n = \alpha r^n \cos(n\theta) + \beta r^n \sin(n\theta)$ et $v_n = \gamma r^n \cos(n\theta) + \delta r^n \sin(n\theta)$.

3ème cas : une valeur propre double.

On va procéder comme dans les autres cas en faisant un changement de suite $\tilde{U}_n = Q^{-1}U_n$. La différence est que cette fois les nouvelles suites $\tilde{u}_n$ et $\tilde{v}_n$ ne seront que partiellement découplées.

On note λ la valeur propre (double) et on choisit V un vecteur propre associé. On a vu que pour n'importe quel vecteur W le vecteur $AW - \lambda W$ était colinéaire à V, i.e. $AW - \lambda W = aV$ où a est un nombre. C'est en particulier vrai pour U_0. Soit donc a tel que $AU_0 - \lambda U_0 = aV$. On supposera que U_0 n'est pas colinéaire à V (sinon U_0 est aussi un vecteur propre et dans ce cas on a déjà vu que $U_n = \lambda^n U_0$). La matrice $Q = \begin{pmatrix} V & U_0 \end{pmatrix}$ est alors inversible et vérifie $Q^{-1}AQ = T = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Comme dans les cas précédents, on définit $\tilde{U}_n = Q^{-1}U_n$. Pour $n = 0$, comme $Q = \begin{pmatrix} V & U_0 \end{pmatrix}$, on constate que $\tilde{U}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, i.e. $\tilde{u}_0 = 0$ et $\tilde{v}_0 = 1$. En effet,

$$Q\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & U_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = U_0 \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = Q^{-1}U_0.$$

La suite $\tilde{U}_n$ vérifie ici

$$\tilde{U}_{n+1} = Q^{-1}U_{n+1} = Q^{-1}AU_n = Q^{-1}AQ\tilde{U}_n = T\tilde{U}_n \iff \left\{ \begin{array}{rcr} \tilde{u}_{n+1} & = & \lambda\tilde{u}_n + a\tilde{v}_n \\ \tilde{v}_{n+1} & = & \lambda\tilde{v}_n \end{array} \right. .$$

On a cette fois partiellement découplé le système. La suite $(\tilde{v}_n)_n$ est une suite géométrique avec $\tilde{v}_0 = 1$ et on a donc immédiatement $\tilde{v}_n = \lambda^n$. Il reste à calculer $\tilde{u}_n$. Cette dernière vérifie $\tilde{u}_0 = 0$ et

$$\tilde{u}_{n+1} = \lambda\tilde{u}_n + a\tilde{v}_n = \lambda\tilde{u}_n + a\lambda^n.$$

Écrivons cette relation pour les premières valeurs de n.

$$\begin{array}{rcl} n = 0 \ : \ \tilde{u}_1 & = & \lambda\tilde{u}_0 + a\lambda^0 = a, \\ n = 1 \ : \ \tilde{u}_2 & = & \lambda\tilde{u}_1 + a\lambda \ = 2a\lambda, \\ n = 2 \ : \ \tilde{u}_3 & = & \lambda\tilde{u}_2 + a\lambda^2 = 3a\lambda^2, \\ n = 3 \ : \ \tilde{u}_4 & = & \lambda\tilde{u}_3 + a\lambda^3 = 4a\lambda^3, \ldots \end{array}$$

On montre alors par récurrence que $\tilde{u}_n = na\lambda^{n-1}$ et ainsi $\tilde{U}_n = \begin{pmatrix} na\lambda^{n-1} \\ \lambda^n \end{pmatrix}$. Finalement on obtient

$$U_n = Q\tilde{U}_n = na\lambda^{n-1}V + \lambda^n U_0. \tag{5.1}$$

Remarque 5.1. *Si U_0 est aussi vecteur propre alors $AU_0 - \lambda U_0 = 0$, i.e. $a = 0$, et on retrouve bien que $U_n = \lambda^n U_0$.*

Exemple 5.4. *On considère le système de suites $\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 3u_n + v_n \\ v_{n+1} & = & -u_n + v_n \end{array}\right.$, et on choisit pour conditions initiales $u_0 = 2$ et $v_0 = 1$, i.e. $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a vu dans l'Exemple 4.13 que A avait 2 comme valeur propre double et que les vecteurs propres associés sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$ avec $x \neq 0$. On prend par exemple $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.*

On peut remarquer que $AU_0 - 2U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ est bien colinéaire à V : $AU_0 - 2U_0 = aV$ avec $a = 3$. Si on pose $Q = \begin{pmatrix} V & U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\det Q = 1 \times 1 - 2 \times (-1) = 3$ donc Q est inversible et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$. On peut vérifier que $\tilde{U}_0 = Q^{-1}U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ont bien la forme annoncée.

On obtient ainsi $\tilde{v}_{n+1} = 2\tilde{v}_n$ avec $\tilde{v}_0 = 1$ donc $\tilde{v}_n = 2^n$, et $\tilde{u}_{n+1} = 2\tilde{u}_n + 3\tilde{v}_n$ avec $\tilde{u}_0 = 0$ et donc $\tilde{u}_n = 3n \times 2^{n-1}$. Finalement on obtient (c'est la formule (5.1) avec $\lambda = 2$ et $a = 3$)

$$U_n = Q\tilde{U}_n = 3n2^{n-1}V + 2^nU_0 = 3n2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2^n\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3n2^{n-1} + 2^{n+1} \\ -3n2^{n-1} + 2^n \end{pmatrix},$$

autrement dit $u_n = 3n2^{n-1} + 2^{n+1}$ et $v_n = 3n2^{n-1} + 2^n$.

5.1.2 Points fixes et stabilité

On revient maintenant à un système général de suites définies par récurrence

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & f(u_n, v_n) \\ v_{n+1} & = & g(u_n, v_n) \end{array}\right.,$$

où $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont des fonctions de deux variables.

L'étude de telles suites de façon générale est souvent difficile. On va s'intéresser ici uniquement aux points fixes, valeurs de u_0 et v_0 pour lesquelles les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont constantes, ainsi qu'à leur stabilité. Cette notion est la même que pour une seule suite (voir le Chapitre 1, Section 1.3) : si on s'écarte un tout petit peu d'un point fixe, va-t-on revenir vers celui-ci ou au contraire s'en éloigner ?

Définition 5.1. *On appelle points fixes du système $\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & f(u_n, v_n) \\ v_{n+1} & = & g(u_n, v_n) \end{array}\right.$ les couples (x, y) qui sont solutions du système d'équations $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & f(x, y) \\ y & = & g(x, y) \end{array}\right.$.*

Tout comme dans le Chapitre 1, l'appellation "point fixe" provient du fait suivant. Si (u_0, v_0) est est un point fixe, alors pour tout n on a $u_n = u_0$ et $v_n = v_0$. En effet, par définition $u_1 = f(u_0, v_0)$ mais $f(u_0, v_0) = u_0$ donc $u_1 = u_0$. De même $v_1 = g(u_0, v_0) = v_0$ et ainsi de suite.

Exemple 5.5. *Soit le système de suites*

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \frac{1}{2}u_n(1+u_n-v_n) \\ v_{n+1} & = & \frac{1}{2}v_n(u_n-1) \end{array}\right. .$$

C'est un système de la forme précédente avec $f(x,y) = \frac{1}{2}x(1+x-y)$ *et* $g(x,y) = \frac{1}{2}y(x-1)$.

On cherche les points fixes de ce système. On doit donc trouver les couples (x,y) *qui vérifient*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{2}x(1+x-y) \\ y & = & \frac{1}{2}y(x-1) \end{array}\right. .$$

La seconde équation peut s'écrire sous la forme $\frac{1}{2}y(x-3) = 0$. *Donc soit* $y = 0$ *soit* $x = 3$. *On utilise ensuite la première équation :*

- *Si* $y = 0$ *on obtient* $x = \frac{1}{2}x(1+x) \iff \frac{1}{2}x(x-1) = 0 \iff x = 0$ *ou* $x = 1$.
- *Si* $x = 3$ *on obtient* $3 = \frac{3}{2}(4-y) \iff y = 2$.

Finalement on trouve 3 *points fixes :* $(0,0)$, $(1,0)$ *et* $(3,2)$.

Exemple 5.6. *Soit le système de suites* $\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & ru_n\exp(-av_n) \\ v_{n+1} & = & cu_n(1-\exp(-av_n)) \end{array}\right.$ *où* r, a *et* c *sont des nombres strictement positifs donnés. Ce système s'appelle le modèle de Nicholson-Bailey, il décrit l'évolution d'un système hôte-parasitoïde. La quantité* u_n *désigne le nombre d'hôtes à l'instant* n *et* v_n *celui de parasitoïdes. Le nombre* r *représente le taux de croissance intrinsèque des hôtes,* a *quantifie l'impact du parasitoïde sur son hôte et* c *le nombre moyen de parasitoïdes viables issus d'un seul hôte parasité.*

On cherche les points fixes de ce système. On doit donc trouver les couples (x,y) *qui vérifient* $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & rx\exp(-ay) \\ y & = & cx(1-\exp(-ay)) \end{array}\right.$. *On peut réécrire la première équation sous la forme*

$$x\,(r\exp(-ay)-1) = 0.$$

On en déduit que soit $x = 0$ *soit* $r\exp(-ay) - 1 = 0 \iff y = \frac{\ln(r)}{a}$. *On utilise ensuite la seconde équation. Si* $x = 0$ *on obtient* $y = 0$, *et si* $y = \frac{\ln(r)}{a}$ *on obtient, si* $r \neq 1$,

$$\frac{\ln(r)}{a} = cx \times \left(1 - \frac{1}{r}\right) \quad \iff \quad x = \frac{r\ln(r)}{ac(r-1)}.$$

Finalement, si $r \neq 1$, *on a deux points fixes :* $(0,0)$ *et* $\left(\frac{r\ln(r)}{ac(r-1)}, \frac{\ln(r)}{a}\right)$. *D'un point de vue étude mathématique on a 2 points fixes. Si on veut maintenant revenir à l'interprétation* *biologique de ce système, on ne s'intéressera qu'aux points fixes positifs (un nombre d'individus est toujours positif).* $(0,0)$ *convient toujours (si on n'a rien au départ on n'aura jamais rien au cours de l'évolution). Pour que le point fixe* $\left(\dfrac{r\ln(r)}{ac(r-1)}, \dfrac{\ln(r)}{a}\right)$ *soit positif il faut*

$$\frac{r\ln(r)}{ac(r-1)} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\ln(r)}{r-1} \geq 0$$

ce qui est toujours le cas ($\ln(r)$ *et* $r-1$ *ont toujours le même signe), et*

$$\frac{\ln(r)}{a} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r \geq 1.$$

En conclusion, si $r < 1$ *on n'a qu'un point fixe positif et si* $r > 1$ *il y en a deux.*

Si $r = 1$*, dans le cas* $y = \dfrac{\ln(r)}{a} = 0$ *la seconde équation est toujours vraie. On a alors une infinité de points fixes, tous les points de la forme* $(x, 0)$*. Puisque* r *représente le taux de croissance intrinsèque des hôtes, c'est-à-dire en l'absence de parasitoïde, si* $r = 1$ *cela signifie que la population d'hôtes n'évolue pas en absence de parasitoïdes. C'est précisément ce qu'on a retrouvé, n'importe quel couple* $(x, 0)$ *est point fixe.*

On s'intéresse ensuite à la question de la stabilité d'un point fixe. On voudrait un critère simple pour décider si un point fixe est stable ou instable. On va raisonner comme dans le cas d'une seule suite.

Prenons donc un point fixe (x_*, y_*). Lorsque (u_n, v_n) est proche de (x_*, y_*) on peut approcher les fonctions f et g par leur plan tangent (voir Chapitre 3, Section 3.2.2) et écrire

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & f(u_n, v_n) \simeq f(x_*, y_*) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_*, y_*) \times (u_n - x_*) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_*, y_*) \times (v_n - y_*) \\ v_{n+1} & = & g(u_n, v_n) \simeq g(x_*, y_*) + \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_*, y_*) \times (u_n - x_*) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_*, y_*) \times (v_n - y_*) \end{array}\right. .$$

Puisque (x_*, y_*) est un point fixe on a $f(x_*, y_*) = x_*$ et $g(x_*, y_*) = y_*$ et donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} - x_* & \simeq & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_*, y_*) \times (u_n - x_*) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_*, y_*) \times (v_n - y_*) \\ v_{n+1} - y_* & \simeq & \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_*, y_*) \times (u_n - x_*) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_*, y_*) \times (v_n - y_*) \end{array}\right. .$$

Les suites $\tilde{u}_n = u_n - x_*$ et $\tilde{v}_n = v_n - y_*$ se comportent donc approximativement comme si elles vérifiaient le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{u}_{n+1} & = & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_*, y_*) \times \tilde{u}_n + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_*, y_*) \times \tilde{v}_n \\ \tilde{v}_{n+1} & = & \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_*, y_*) \times \tilde{u}_n + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_*, y_*) \times \tilde{v}_n \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad U_{n+1} = AU_n,$$

où $U_n = \begin{pmatrix} \tilde{u}_n \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_*, y_*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_*, y_*) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_*, y_*) & \frac{\partial g}{\partial x}(x_*, y_*) \end{pmatrix}$.

Dire que (u_n, v_n) reste proche de (x_*, y_*) revient à dire que $(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)$ reste proche de $(0,0)$. On a vu que les suites solutions d'un système linéaire étaient de la forme $C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$, si A a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2, ou bien $C_1\lambda^n + C_2 n\lambda^n$ si A a une valeur propre double. Comme pour des suites géométriques, elles vont tendre vers 0 si les deux valeurs propres vérifient $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$, et augmenter (en valeur absolue) si au moins l'une des deux valeurs propres vérifie $|\lambda_1| > 1$ ou $|\lambda_2| > 1$.

En conclusion on admettra le critère suivant

Proposition 5.2. *Soit (x_*, y_*) un point fixe et A la matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_*, y_*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_*, y_*) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_*, y_*) & \frac{\partial g}{\partial x}(x_*, y_*) \end{pmatrix}$ (A s'appelle la matrice jacobienne du système au point (x_*, y_*)). On note λ_1, λ_2 ses valeurs propres (éventuellement $\lambda_1 = \lambda_2$ en cas de valeur propre double).*

Si $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$ alors (x_*, y_*) est un point fixe stable. Si par contre $|\lambda_1| > 1$ ou $|\lambda_2| > 1$, alors (x_*, y_*) est un point fixe instable.

Remarque 5.2. *Comme pour une seule suite, il y a des cas pour lesquels on ne peut pas décider, par exemple si $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| = 1$.*

Exemple 5.7. *On continue l'exemple 5.5. On a trois points fixes à étudier : $(0,0)$, $(1,0)$ et $(3,2)$. Pour étudier leur stabilité on a besoin de calculer la matrice jacobienne du système et pour cela les dérivées partielles des fonctions f et g. On a $f(x,y) = \frac{1}{2}x(1+x-y)$ et $g(x,y) = \frac{1}{2}y(x-1)$ donc*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x - \frac{y}{2} + \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{2},$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{x-1}{2}.$$

Au point $(0,0)$ on trouve comme matrice jacobienne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) & \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres sont $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. On a $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$ donc $(0,0)$ est un point fixe stable.

Au point $(1,0)$ on trouve comme matrice jacobienne la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ et $\lambda_2 = 0$. On a $|\lambda_1| > 1$ donc $(1,0)$ est instable.

Finalement, au point $(3,2)$ on trouve comme matrice jacobienne la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = \frac{7+i\sqrt{15}}{4}$ et $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$. On a $|\lambda_1| = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = 2 > 1$ donc $(3,2)$ est instable.

Dans certains cas, on peut éviter de calculer les valeurs propres de la matrice jacobienne. On a vu que celles-ci étaient les racines du polynôme du second degré $\det(A - xI_2) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, et on sait que le produit des racines vaut alors $\frac{\gamma}{\alpha}$. Si ce produit est strictement supérieur à 1 en valeur absolue alors nécessairement au moins une des racines l'est aussi et donc on a un point fixe instable. Si on calcule les coefficients α et γ on se rend compte que $\alpha = 1$ et $\gamma = \det(A)$. Ainsi on a le critère simple suivant qui évite de calculer les valeurs propres.

Proposition 5.3. *Soit (x_*, y_*) un point fixe et $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_*, y_*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_*, y_*) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_*, y_*) & \frac{\partial g}{\partial x}(x_*, y_*) \end{pmatrix}$ la matrice jacobienne du système au point (x_*, y_*). Si $|\det(A)| > 1$ alors (x_*, y_*) est un point fixe instable.*

Dans l'exemple précédent, on trouve que le déterminant de la matrice jacobienne vaut $-\frac{1}{4}$ au point $(0, 0)$, 0 au point $(1, 0)$ et 4 au point $(3, 2)$. On peut en déduire immédiatement que le point $(3, 2)$ est instable.

Exemple 5.8. *On continue l'étude de l'exemple 5.6. On va se placer dans le cas $r \neq 1$. On a donc deux points fixes à étudier : $(0, 0)$ et $\left(\dfrac{r\ln(r)}{ac(r-1)}, \dfrac{\ln(r)}{a}\right)$. Pour étudier la stabilité on a besoin de calculer la matrice jacobienne du système et pour cela les dérivées partielles des fonctions f et g. On a $f(x, y) = rx\exp(-ay)$ et $g(x, y) = cx(1 - \exp(-ay))$ donc*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = r\exp(-ay), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -arx\exp(-ay),$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = c(1 - \exp(-ay)), \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = acx\exp(-ay).$$

Au point $(0, 0)$ on trouve comme matrice jacobienne la matrice $A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ici le déterminant de A vaut 0 donc on ne peut pas conclure. On cherche les valeurs propres de A et on trouve facilement que celles-ci sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = r$. On a bien entendu $|\lambda_1| < 1$. En conclusion si $r < 1$ alors $(0, 0)$ est stable et si $r > 1$ alors $(0, 0)$ est instable.

Pour le point $\left(\dfrac{r\ln(r)}{ac(r-1)}, \dfrac{\ln(r)}{a}\right)$ on trouve comme matrice jacobienne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{r\ln(r)}{c(r-1)} \\ \dfrac{c(r-1)}{r} & \dfrac{\ln(r)}{r-1} \end{pmatrix}.$$

On a $\det(A) = 1 \times \dfrac{\ln(r)}{r-1} + \dfrac{r\ln(r)}{c(r-1)}\dfrac{c(r-1)}{r} = \dfrac{r\ln(r)}{r-1}$. On se place dans le cas $r > 1$ (sinon ce point fixe n'est pas positif). On va montrer qu'on a toujours $\det(A) > 1$ et donc le point fixe est toujours instable.

On remarque que $\det(A) = \dfrac{r\ln(r)}{r-1} > 1$ si et seulement si $r\ln(r) > r - 1$ c'est-à-dire si et seulement si $r\ln(r) - r + 1 > 0$. Si on note $h(r) = r\ln(r) - r + 1$ on constate que

$h'(r) = \ln(r) > 0$ pour $r > 1$ donc la fonction h est croissante, et comme $h(1) = 0$ on en déduit qu'on a bien $h(r) > 0$ si $r > 1$ et donc $\det(A) > 1$.

On a donc finalement

- *Si $r < 1$ il y a un seul point fixe $(0,0)$ qui est stable. En fait si $r < 1$ même en l'absence de parasitoïde la population d'hôtes décroit et la présence de parasitoïde ne fait qu'accentuer ce phénomène. La décroissance de la population hôte entraine inévitablement celle de parasitoïdes., les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ vont tendre vers* 0.
- *Si $r > 1$ les deux points fixes $(0,0)$ et $\left(\dfrac{r\ln(r)}{ac(r-1)}, \dfrac{\ln(r)}{a}\right)$ sont instables.*

5.2 Systèmes d'équations différentielles

Dans cette section on va étudier des systèmes de deux équations différentielles autonomes, c'est-à-dire du type $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{array}\right.$, ou plus simplement $\left\{\begin{array}{l} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{array}\right.$.

5.2.1 Étude des systèmes linéaires

On commence par l'étude des systèmes dits linéaires qui sont l'équivalent pour les équations différentielles des systèmes de suites vus dans la Section 5.1.1. Ils s'écrivent sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = ax(t) + by(t)), \\ y'(t) = cx(t) + dy(t), \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \text{ donnés.} \end{array}\right.$$

On a vu rapidement dans le Chapitre 4 que de tels systèmes pouvaient s'écrire sous la forme $X'(t) = AX(t)$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, $X(0) = X_0$ étant donné. Comme dans la Section 5.1.1 on va utiliser les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A et en particulier les transformations $Q^{-1}AQ = D$ ou $Q^{-1}AQ = T$ pour découpler le système. À nouveau, on distinguera trois cas selon que A possède 2 valeurs propres réelles distinctes, 2 valeurs propres complexes conjuguées ou 1 valeur propre double.

1er cas : 2 valeurs propres réelles distinces.

On note λ_1, λ_2 les deux valeurs propres de A, on choisit des vecteurs propres V_1 et V_2 associés et on note $Q = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}$ la matrice formée par les deux vecteurs propres. On sait que $Q^{-1}AQ = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Pour tout t, on définit $\begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} = \tilde{X}(t) = Q^{-1}X(t) \iff X(t) = Q\tilde{X}(t)$. On a alors $\tilde{X}'(t) = Q^{-1}X'(t)$ (il faut voir ici Q^{-1} comme une constante). En utilisant $X'(t) = AX(t)$ on a alors

$$\tilde{X}'(t) = Q^{-1}X'(t) = Q^{-1}AX(t) = Q^{-1}AQ\tilde{X}(t) = D\tilde{X}(t).$$

La “fonction” $\tilde{X}(t)$ vérifie une équation similaire à $X(t)$ mais où on a remplacé la matrice A par la matrice D. Le système correspondant à $\tilde{X}'(t) = D\tilde{X}(t)$ est alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{x}'(t) & = & \lambda_1\tilde{x}(t), \\ \tilde{y}'(t) & = & \lambda_2\tilde{y}(t). \end{array}\right.$$

Comme pour les suites on a découplé les équations. On résoud ici facilement $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{\lambda_1 t}$ et $\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 e^{\lambda_2 t}$ où $\tilde{x}_0$ et $\tilde{y}_0$ sont donnés par $\begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix} = \tilde{X}(0) = Q^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Finalement, en utilisant la relation $X(t) = Q\tilde{X}(t)$ on obtient

$$X(t) = \tilde{x}_0 e^{\lambda_1 t} V_1 + \tilde{y}_0 e^{\lambda_2 t} V_2.$$

Le schéma pour résoudre le système est donc le suivant :

1. On calcule Q^{-1} puis $\tilde{X}_0 = Q^{-1} X_0$.
2. Le vecteur $\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix}$ défini par $\tilde{X}(t) = Q^{-1} X(t)$ vérifie
$$\tilde{X}'(t) = D\tilde{X}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{x}'(t) & = & \lambda_1 \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}'(t) & = & \lambda_2 \tilde{y}(t) \end{array} \right. ,$$
et on obtient donc $\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 e^{\lambda_1 t} \\ \tilde{y}_0 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$.
3. On revient au système de départ en utilisant $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix}$.

Exemple 5.9. *On considère le système* $\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 4x(t) - 2y(t) \\ y'(t) & = & x(t) + y(t) \end{array} \right.$ *avec* $x(0) = 1$ *et* $y(0) = 0$. *La matrice associée au système est* $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Ses valeurs propres sont* $\lambda_1 = 2$ *et* $\lambda_2 = 3$, *et* $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sont des vecteurs propres associés (voir Exemple 5.1). On a alors* $Q = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *(voir Exemple 5.2) et* $\begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix} = \tilde{X}_0 = Q^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *On a donc* $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{\lambda_1 t} = -e^{2t}$ *et* $\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 e^{\lambda_2 t} = e^{3t}$, *d'où finalement*

$$X(t) = Q\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{3t} - e^{2t} \\ e^{3t} - e^{2t} \end{pmatrix},$$

et donc $x(t) = 2e^{3t} - e^{2t}$ *et* $y(t) = e^{3t} - e^{2t}$.

2ème cas : 2 valeurs propres complexes conjuguées.

On a vu que les deux valeurs propres s'écrivent cette fois $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$ et que si $V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre (à coefficients complexes) pour λ_1 alors $V_2 = \bar{V}_1 = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre (à coefficients complexes) pour λ_2. On raisonne ensuite comme dans le cas de deux valeurs propres réelles distinctes.

Une fois le système découplé, on a les équations $\tilde{x}'(t) = \lambda_1\tilde{x}(t)$ et $\tilde{y}'(t) = \lambda_2\tilde{y}(t)$ mais ici λ_1 et λ_2 sont des nombres complexes. On admettra que les solutions ont toujours la forme $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ et $\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$. Si $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, il faut ici comprendre le nombre $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ comme

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \mathrm{e}^{\alpha t + i\beta t} = \mathrm{e}^{\alpha t} \times \mathrm{e}^{i\beta t} = \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)).$$

Exemple 5.10. *On considère le système* $\left\{\begin{array}{rcr} x'(t) & = & x(t) + y(t) \\ y'(t) & = & -x(t) + y(t) \end{array}\right.$ *avec* $x(0) = 4$ *et* $y(0) = 2$*. La matrice associée au système est* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$*. Ses valeurs propres sont* $\lambda_1 = 1 + i$ *et* $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = 1 - i$*, et* $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ *et* $V_2 = \bar{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ *sont des vecteurs propres associés (voir Exemple 5.3). On a alors* $Q = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{pmatrix}$ *(voir Exemple 5.3) et* $\begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{pmatrix} = \tilde{X}_0 = Q^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 2+i \end{pmatrix}$*. On a donc*

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0\mathrm{e}^{\lambda_1 t} = (2-i)\mathrm{e}^{(1+i)t} = (2-i) \times \mathrm{e}^t(\cos(t) + i\sin(t))$$

et

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0\mathrm{e}^{\lambda_2 t} = (2+i)\mathrm{e}^{(1-i)t} = (2+i) \times \mathrm{e}^t(\cos(t) - i\sin(t)),$$

d'où finalement

$$X(t) = Q\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2-i) \times \mathrm{e}^t(\cos(t) + i\sin(t)) \\ (2+i) \times \mathrm{e}^t(\cos(t) - i\sin(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t(4\cos(t) + 2\sin(t)) \\ \mathrm{e}^t(2\cos(t) - 4\sin(t)) \end{pmatrix}$$

et donc $x(t) = \mathrm{e}^t(4\cos(t) + 2\sin(t))$ *et* $y(t) = \mathrm{e}^t(2\cos(t) - 4\sin(t))$.

3ème cas : une valeur propre double.

On va procéder comme dans le cas des suites en utilisant la transformation $Q^{-1}AQ = T$ pour découpler partiellement le système. On note λ la valeur propre (double) et on choisit V un vecteur propre associé. On a vu que pour n'importe quel vecteur W le vecteur $AW - \lambda W$ était colinéaire à V, i.e. $AW - \lambda W = aV$ où a est un nombre. On choisit un tel vecteur W qui n'est pas colinéaire à V (X_0 par exemple si possible). La matrice $Q = \begin{pmatrix} V & W \end{pmatrix}$ est alors inversible et vérifie $Q^{-1}AQ = T = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Comme dans les cas précédents, on définit $\begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} = \tilde{X}(t) = Q^{-1}X(t)$. Si on a pris pour vecteur W le vecteur X_0 alors $\tilde{X}_0 = \tilde{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et si X_0 était colinéaire à V, i.e. $X_0 = \alpha V$, alors $\tilde{X}_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\tilde{X}(t)$ vérifie cette fois

$$\tilde{X}'(t) = Q^{-1}X'(t) = Q^{-1}AX(t) = Q^{-1}AQ\tilde{X}(t) = T\tilde{X}(t) \iff \left\{\begin{array}{rcr} \tilde{x}'(t) & = & \lambda\tilde{x}(t) + a\tilde{y}(t) \\ \tilde{y}'(t) & = & \lambda\tilde{y}(t) \end{array}\right. .$$

On a partiellement découplé le système. On a immédiatement $\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 e^{\lambda t}$. La fonction $\tilde{x}$ vérifie alors l'équation différentielle

$$\tilde{x}'(t) = \lambda x(t) + a\tilde{y}_0 e^{\lambda t}.$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre. On commence par résoudre l'équation sans second membre (équation homogène associée) puis on utilise la méthode dite de variation de la constante (voir cours de L1). Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $Ce^{\lambda t}$, on cherche donc la solution de l'équation avec second membre sous la forme $\tilde{x}(t) = C(t)e^{\lambda t}$. On obtient que

$$\tilde{x}'(t) = \lambda x(t) + a\tilde{y}_0 e^{\lambda t} \iff C'(t) = a\tilde{y}_0,$$

et on en déduit que $\tilde{x}(t) = (a\tilde{y}_0 t + \tilde{x}_0)e^{\lambda t}$. Finalement on obtient

$$X(t) = Q\tilde{X}(t) = e^{\lambda t}\left((a\tilde{y}_0 t + \tilde{x}_0)V + \tilde{y}_0 W\right). \tag{5.2}$$

Remarque 5.3. *Si $X_0 = \alpha V$ est colinéaire à V on a $\tilde{x}_0 = \alpha$ et $\tilde{y}_0 = 0$ (voir ci-dessus), donc $X(t) = e^{\lambda t}\alpha V = e^{\lambda t}X_0$.*

Si X_0 n'est pas colinéaire à V, en prenant $W = X_0$, on obtient $\tilde{x}_0 = 0$ et $\tilde{y}_0 = 1$ (voir ci-dessus) et donc $X(t) = e^{\lambda t}(atV + X_0)$ où a est défini par $AX_0 - \lambda X_0 = aV$.

Exemple 5.11. *On considère le système de suites $\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 3x(t) + y(t) \\ y'(t) & = & -x(t) + y(t) \end{array}\right.$, et on choisit pour conditions initiales $x_0 = 2$ et $y_0 = 1$, i.e. $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice associée au système est $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Elle possède une valeur propre double $\lambda = 2$ et un vecteur propre associé est $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (voir Exemple 5.4). Le vecteur X_0 n'est pas colinéaire à V, on prend donc $W = X_0$ et on a $AW - \lambda W = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ qui est bien colinéaire à V : $AW - 2W = aV$ avec $a = 3$. On pose alors $Q = \begin{pmatrix} V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, et $\tilde{X}_0 = Q^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ont bien la forme annoncée.*

On obtient ainsi $\tilde{y}'(t) = 2\tilde{y}(t)$ avec $\tilde{y}_0 = 1$ donc $\tilde{y}(t) = e^{2t}$, et $\tilde{x}'(t) = 2\tilde{x}(t) + 3\tilde{y}(t) = 2\tilde{x}(t) + 3e^{2t}$ avec $\tilde{x}_0 = 0$. On trouve, après calculs, $\tilde{x}(t) = 3te^{2t}$. Finalement on obtient (c'est la formule (5.2) avec $\lambda = 2$ et $a = 3$)

$$X(t) = Q\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(3t+2) \\ e^{2t}(-3t+1) \end{pmatrix},$$

autrement dit $x(t) = e^{2t}(3t+2)$ et $y(t) = e^{2t}(-3t+1)$.

Remarque 5.4. *On peut constater que la forme des solutions est similaire à celles des équations différentielles du second ordre* $ax''(t)+bx'(t)+cx(t)=0$*. Dans ce dernier cas, pour résoudre l'équation, on cherche les racines du polynôme* ax^2+bx+c*. Par exemple, dans le cas de deux racines rélles distinctes* λ_1 *et* λ_2*, les solutions sont de la forme* $x(t)=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$*. Dans le cas des systèmes on trouve des solutions ayant la même forme mais où cette fois* λ_1 *et* λ_2 *sont les valeurs propres de la matrice associée au système, i.e. les racines du polynôme* $\det(A-xI_2)$*. Ce n'est pas un hasard et on peut en fait montrer que si* $X(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ *est solution du système* $X'(t)=AX(t)$ *alors les fonctions* $x(t)$ *et* $y(t)$ *vérifient toutes les deux l'équation différentielle du second ordre* $ax''+bx'+cx=0$ *où* a*,* b *et* c *sont tels que* $\det(A-xI_2)=ax^2+bx+c$*.*

5.2.2 Solutions stationnaires et stabilité

On revient maintenant à un système général d'équations différentielles

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & f(x(t),y(t)), \\ y'(t) & = & g(x(t),y(t)), \end{array}\right.$$

où $f(x,y)$ et $g(x,y)$ sont des fonctions de deux variables.

Tout comme dans le cas des systèmes de suites on va s'intéresser ici uniquement aux solutions stationnaires, valeurs de x_0 et y_0 pour lesquelles les deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont constantes, et à leur stabilité. Pour les trouver le principe est le même que dans le Chapitre 2. Si $x(t)$ et $y(t)$ sont constantes égales à x_0 et y_0 respectivement, alors leur dérivée est nulle. Comme $x'(t)=f(x(t),y(t))$ on a nécessairement $f(x_0,y_0)=0$ et de même $g(x_0,y_0)=0$. Réciproquement, on vérifie que si x_0 et y_0 sont tels que $f(x_0,y_0)=g(x_0,y_0)=0$ alors les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ définies sur $\mathbb{R}$ tout entier et constantes égales à x_0 et y_0 respectivement sont bien solutions.

Pour résumer :

Définition 5.4. *On appelle solution stationnaire du système* $\left\{\begin{array}{l} x'=f(x,y) \\ y'=g(x,y) \end{array}\right.$ *toute solution qui est constante.*

Proposition 5.5. *Les fonction* x *et* y *constantes égales à* x_0 *et* y_0 *respectivement forment une solution stationnaire si et seulement si* $f(x_0,y_0)=g(x_0,y_0)=0$*.*

Exemple 5.12. *On considère le système différentiel* $\left\{\begin{array}{l} x'=x(1-y), \\ y'=y(x-1), \end{array}\right.$ *(modèle de Lotka-Volterra). Les fonctions* f *et* g *sont ici* $f(x,y)=x(1-y)$ *et* $g(x,y)=y(x-1)$*. Pour trouver les solutions stationnaires on doit donc trouver les couples* (x,y) *qui vérifient* $\left\{\begin{array}{l} x(1-y)=0, \\ y(x-1)=0. \end{array}\right.$ *La première équation est vraie si et seulement si* $x=0$ *ou* $y=1$ *et la seconde si et seulement si* $y=0$ *ou* $x=1$*. Pour que les deux soient vérifiées il faut donc que* $x=0$ *et* $y=0$ *ou alors* $y=1$ *et* $x=1$*. Il y a donc finalement deux solutions stationnaires :* $(0,0)$ *et* $(1,1)$*.*

Exemple 5.13. *On considère le système différentiel*

$$\begin{cases} x' &= rx\left(1 - \dfrac{x}{M}\right) - axy, \\ y' &= -my + bxy, \end{cases}$$

où a, b, m, r et M sont des nombres strictement positifs. Ce système décrit un modèle de deux populations : des proies et des prédateurs. La quantité $x(t)$ représente le nombre de proies au temps t et $y(t)$ celui de prédateurs. Le nombre r représente le taux de croissance des proies (en l'absence de prédateurs) et M la capacité limite du milieu (en absence de prédateurs, c'est-à-dire si $y = 0$, on retrouve le modèle de Verhulst, voir l'Exemple 2.4 au Chapitre 2). Le nombre m représente le taux de mortalité des prédateurs. Le paramètre a décrit l'efficacité des prédateurs dans leurs attaques et b est relié au rendement de la conversion de biomasse proie en biomasse prédateur (le rendement est $e = b/a$).

On a ici $f(x,y) = rx\left(1 - \dfrac{x}{M}\right) - axy$ et $g(x,y) = -my + bxy$. On cherche les solutions stationnaires de ce système. L'équation $g(x,y) = 0$ se réécrit $y(bx - m) = 0$ et donne donc $y = 0$ ou $x = m/b$. On reporte ensuite ces deux possibilités dans l'équation $f(x,y) = 0$:

- *si $y = 0$ on a $rx\left(1 - \dfrac{x}{M}\right) = 0$ et donc $x = 0$ et $x = M$ (si $y = 0$ il n'y a pas de prédateurs et on retrouve pour x les solutions stationnaires trouvées dans l'Exemple 2.4).*
- *si $x = m/b$ on obtient $\dfrac{rm}{b}\left(1 - \dfrac{m}{bM}\right) - a\dfrac{m}{b}y = 0$ et donc $y = \dfrac{r}{a}\left(1 - \dfrac{m}{bM}\right) = \dfrac{r}{abM}(bM - m)$.*

On trouve finalement trois solutions stationnaires : $(0,0)$, $(M,0)$ et $\left(\dfrac{m}{b}, \dfrac{r}{abM}(bM - m)\right)$. Les deux premières correspondent à une absence de prédateur et la troisième a une coexistence des deux populations. D'un point de vue biologique elles n'ont de sens que si elles sont "positives". Pour les deux premières c'est toujours le cas, et pour la dernière c'est le cas si et seulement si $bM - m \geq 0$ c'est-à-dire $m \leq bM$ (le taux de mortalité des prédateurs doit être inférieur au taux maximal de natalité bM : le taux de natalité dépend de la quantité de proie et vaut bx, et M est la capacité limite du milieu).

On s'intéresse maintenant à la question de la stabilité d'une solution stationnaire. Comme pour les systèmes de suites, on cherche un critère simple pour décider si une solution stationnaire est stable ou instable.

Prenons donc une solution stationnaire (x_*, y_*). Lorsque $(x(t), y(t))$ est proche de (x_*, y_*) on peut approcher les fonctions f et g par leur plan tangent et écrire

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t),y(t)) \simeq f(x_*,y_*) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_*,y_*) \times (x(t) - x_*) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_*,y_*) \times (y(t) - y_*) \\ y'(t) &= g(x(t),y(t)) \simeq g(x_*,y_*) + \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_*,y_*) \times (x(t) - x_*) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_*,y_*) \times (y(t) - y_*) \end{cases}.$$

Puisque (x_*, y_*) est une solution stationnaire on a $f(x_*,y_*) = g(x_*,y_*) = 0$ et donc

$$\begin{cases} x'(t) &\simeq \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_*,y_*) \times (x(t) - x_*) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_*,y_*) \times (y(t) - y_*) \\ y'(t) &\simeq \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_*,y_*) \times (x(t) - x_*) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_*,y_*) \times (y(t) - y_*) \end{cases}.$$

Les fonctions $\tilde{x}(t) = x(t) - x_*$ et $\tilde{y}(t) = y(t) - y_*$ ont pour dérivées $\tilde{x}'(t) = x'(t)$ et $\tilde{y}'(t) = y'(t)$. Elles se comportent donc approximativement comme si elles vérifiaient le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{x}'(t) & = & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_*, y_*) \times \tilde{x}(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_*, y_*) \times \tilde{y}(t) \\ \tilde{y}(t) & = & \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_*, y_*) \times \tilde{x}(t) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_*, y_*) \times \tilde{y}(t) \end{array}\right. \iff \quad X'(t) = AX(t),$$

où $X(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_*, y_*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_*, y_*) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_*, y_*) & \frac{\partial g}{\partial x}(x_*, y_*) \end{pmatrix}$ est la matrice jacobienne du système au point (x_*, y_*).

Dire que $(x(t), y(t))$ reste proche de (x_*, y_*) revient à dire que $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ reste proche de $(0, 0)$. On a vu que les solutions d'un système linéaire étaient de la forme $C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$, si A a deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2, $\mathrm{e}^{\lambda t}(C_1 + C_2 t)$ si A a une valeur propre double, ou bien $\mathrm{e}^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$ si A a deux valeurs propres complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$. Dans le cas de valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 = \lambda_2$ en cas de valeur propre double) ces fonctions vont tendre vers 0, lorsque $t \to +\infty$, si λ_1 et λ_2 sont strictement négatifs, et augmenter (en valeur absolue) si au moins l'une des deux valeurs propres est strictement positive. Dans le cas de valeurs propres complexes, les fonctions de la forme $\mathrm{e}^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$ vont tendre vers 0 si $\alpha < 0$ et augmenter (en valeur absolue) si $\alpha > 0$. Ce qui importe dans ce dernier cas c'est la partie réelle des valeurs propres.

Si λ_1 et λ_2 sont réelles alors leur partie réelle est elle même, i.e. $\lambda_1 = \mathrm{Re}(\lambda_1)$ et de même pour λ_2. En conclusion on admettra donc le critère suivant

Proposition 5.6. *Soit (x_*, y_*) une solution stationnaire et* $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_*, y_*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_*, y_*) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_*, y_*) & \frac{\partial g}{\partial x}(x_*, y_*) \end{pmatrix}$ *la matrice jacobienne du système au point (x_*, y_*). On note λ_1, λ_2 ses valeurs propres (éventuellement $\lambda_1 = \lambda_2$).*

Si $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$ *<u>et</u>* $\mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$ *alors (x_*, y_*) est une solution stationnaire stable. Si par contre* $\mathrm{Re}(\lambda_1) > 0$ *<u>ou</u>* $\mathrm{Re}(\lambda_2) > 0$*, alors (x_*, y_*) est une solution stationnaire instable.*

Remarque 5.5. *Comme précédemment, il y a des cas pour lesquels on ne peut pas décider. Par exemple si $\lambda_1 = i\beta$ et $\lambda_2 = -i\beta$ on a* $\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) = 0$ *(voir Exemple 5.14).*

Exemple 5.14. *On reprend le système différentiel* $\left\{\begin{array}{l} x' = x(1-y), \\ y' = y(x-1), \end{array}\right.$ *de l'Exemple 5.12 dont les solutions stationnaires sont $(0, 0)$ et $(1, 1)$. On étudie leur stabilité. On a besoin pour cela de calculer la matrice jacobienne du système et donc les dérivées partielles des fonctions f et g. On a $f(x, y) = x(1 - y)$ et $g(x, y) = y(x - 1)$ donc*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 - y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x, \quad \textit{et} \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = y, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x - 1.$$

Au point $(0, 0)$ on trouve comme matrice jacobienne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) & \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ *et* $\lambda_2 = -1$. *On a* $\lambda_1 > 0$ *donc* $(0,0)$ *est une solution stationnaire instable.*

Au point $(1,1)$ *on trouve comme matrice jacobienne la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Ses valeurs propres sont* $\lambda_1 = i$ *et* $\lambda_2 = -i$. *On a* $\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) = 0$ *donc on ne peut pas conclure quant à la stabilité de* $(1,1)$. *(On peut en fait montrer, par d'autres méthodes, que* $(1,1)$ *est stable.)*

Tout comme pour les systèmes de suites on peut éviter de calculer les valeurs propres de la matrice jacobienne. On a vu que celles-ci étaient les racines du polynôme du second degré $\det(A - xI_2) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, et on sait que le produit des racines vaut alors $\frac{\gamma}{\alpha}$ tandis que leur somme vaut $-\frac{\beta}{\alpha}$. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on trouve que $\alpha = 1$, $\beta = -(a+d)$ et $\gamma = ad - bc = \det(A)$ (la quantité $a + d$ est appelée la trace de A et notée $\mathrm{Tr}(A)$).

- Si $\det(A) < 0$, le produit des valeurs propres l'est aussi et nécessairement les valeurs propres sont réelles et donc de signe contraire (si $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ on a $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_1\bar{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2 > 0$). On en déduit que la solution stationnaire correspondante est instable.
- Si $\det(A) = 0$, l'une des valeurs propres est nulle. Si $\mathrm{Tr}(A)$ est strictement positif, la somme des valeurs propres aussi. La seconde valeur propre est donc strictement positive et on a une solution stationnaire instable. Si $\mathrm{Tr}(A)$ est négatif l'autre valeur propre est négative et on ne peut pas conlcure.
- Enfin, si $\det(A) > 0$, soit on a des valeurs propres complexes conjuguées soit elles sont réelles et de même signe. Leur somme vaut $\mathrm{Tr}(A)$. Si cette somme est strictement positive, les valeurs propres sont soit toutes les deux réelles strictement positive soit complexes conjuguées de partie réelle strictement positives (si $\lambda_1 = x+iy$ alors $\lambda_1+\lambda_2 = (x+iy)+(x-iy) = 2x$). Dans les deux cas la solution stationnaire est instable. Inversement, si cette somme est strictement négative, les valeurs propres sont soit toutes les deux réelles strictement négatives soit complexes conjuguées de partie réelle strictement négative. Cette fois, dans les deux cas la solution stationnaire est stable. Finalement si cette somme est nulle, nécessairement les valeurs propres sont de la forme $\lambda_1 = iy$ et $\lambda_2 = -iy$ et on ne peut pas conclure.

Ainsi on a le critère simple suivant qui évite de calculer les valeurs propres.

Proposition 5.7. *Soit* (x_*, y_*) *une solution stationnaire et* $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_*, y_*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_*, y_*) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_*, y_*) & \frac{\partial g}{\partial x}(x_*, y_*) \end{pmatrix}$ *la matrice jacobienne du système au point* (x_*, y_*).
- *Si* $\det(A) < 0$ *alors* (x_*, y_*) *est instable.*
- *Si* $\det(A) = 0$, *soit* $\mathrm{Tr}(A) > 0$ *et* (x_*, y_*) *est instable soit* $\mathrm{Tr}(A) \leq 0$ *et on ne peut pas conclure.*
- *Si* $\det(A) > 0$, *soit* $\mathrm{Tr}(A) > 0$ *et* (x_*, y_*) *est instable, soit* $\mathrm{Tr}(A) < 0$ *et* (x_*, y_*) *est stable, soit* $\mathrm{Tr}(A) = 0$ *et on ne peut pas conlure.*

Dans l'exemple précédent, on trouve que le déterminant de la matrice jacobienne vaut $-1 < 0$ au point $(0,0)$ donc il est instable, et 1 au point $(M, 0)$ alors que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ donc on ne peut pas conclure.

Exemple 5.15. *On reprend le système*

$$\begin{cases} x' = rx\left(1 - \dfrac{x}{M}\right) - axy, \\ y' = -my + bxy, \end{cases}$$

de l'Exemple 5.13. Les solutions stationnaires sont $(0,0)$, $(M,0)$ *et* $\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{abM}(bM-m)\right)$. *On calcule les dérivées partielles des fonctions* f *et* g *:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = r\left(1 - \frac{2x}{M}\right) - ay, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -ax,$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = by, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = bx - m.$$

Au point $(0,0)$ *on trouve comme matrice jacobienne* $A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$. *Ses valeurs propres sont* $\lambda_1 = r$ *et* $\lambda_2 = -m$. *On a* $\lambda_1 > 0$ *donc* $(0,0)$ *est instable : en absence de prédateur (on est ici près de* $y = 0$*) on est ramené au modèle de Verhulst de l'Exemple 2.4 pour lequel* 0 *était instable ce qu'on retrouve ici. On pourrait aussi calculer* $\det(A) = -rm < 0$ *donc on retrouve que* $(0,0)$ *est instable.*

Au point $(M,0)$ *on trouve comme matrice jacobienne* $A = \begin{pmatrix} -r & -aM \\ 0 & bM - m \end{pmatrix}$. *Ses valeurs propres sont* $\lambda_1 = -r$ *et* $\lambda_2 = bM - m$. *On a toujours* $\lambda_1 < 0$, *le signe de* λ_2 *dépend de celui de* $bM - m$. *Si* $bM - m > 0$ *le point* $(M,0)$ *est instable alors que si* $bM - m < 0$ *il est stable. En absence de prédateur la solution stationnaire* M *du modèle de Verhulst est stable. Si* $bM - m < 0$ *le taux de natalité maximal des prédateurs est inférieur au taux de mortalité, la population de prédateur a tendance à s'éteindre (elle revient à* 0*) et donc les proies se comportent comme s'il n'y avait pas de prédateurs : la solution* $(M,0)$ *est stable. Par contre, si* $bM - m > 0$, *le taux de natalité des prédateurs est supérieur à celui de mortalité et la population de prédateurs va donc croitre :* $y(t)$ *s'éloigne de* 0 *et donc* $(M,0)$ *est instable.*

Au point $\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{abM}(bM-m)\right)$ *on trouve comme matrice jacobienne*

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{rb}{mM} & -\frac{ab}{m} \\ \frac{r}{aM}(bM-m) & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule $\det(A) = \dfrac{rb}{mM}(bM-m)$ *et* $\mathrm{Tr}(A) = -\dfrac{rb}{mM}$. *On se place dans le cas* $bM - m > 0$ *sinon cette solution stationnaire n'est pas positive. On constate que* $\mathrm{Tr}(A)$ *est strictement négative et que* $\det(A)$ *est du même signe que* $bM - m$, *strictement positif, et on a donc une solution stationnaire stable.*

On a donc finalement

- *Si* $bM - m < 0$ *il y a deux solutions stationnaires :* $(0,0)$ *qui est instable et* $(0,M)$ *qui est stable.*
- *Si* $bM - m > 0$ *il y a trois solutions stationnaires :* $(0,0)$ *et* $(M,0)$ *qui sont instables, et* $\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{abM}(bM-m)\right)$ *qui est stable.*

Bibliographie

[1] Auger P., Lett C., Poggiale J.-C., Modélisation Mathématique en Écologie, Dunod, 2010.

[2] Kot M., Elements of Mathematical Ecology, Cambridge University Press, 2001.