
TD n°3: Fonctions de deux variables

Exercice 1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis représenter graphiquement ces ensembles dans le plan.

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \quad g(x, y) = \ln(x^2 - y), \quad h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}} + \sqrt{\frac{x + y}{x - y}}.$$

Exercice 2. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer leur ensemble de définition puis les courbes de niveaux \mathcal{C}_k demandées. Représenter graphiquement ces courbes de niveaux.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2x - 3y + 1, & k &= -1, 0, 1, 2; & g(x, y) &= \frac{y}{x}, & k &= 0, 1, 2; \\ h(x, y) &= \frac{x^2 - y}{y^2 - x}, & k &= 0, -1; & i(x, y) &= \frac{xy - x + y}{xy}, & k &= 1, 2. \end{aligned}$$

Exercice 3. Soit f la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 3y + 7$. On note $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$ la surface représentative de f .

a) Montrer que pour tout réel k la courbe de niveau \mathcal{C}_k est soit un cercle soit l'ensemble vide. On précisera le centre et le rayon du cercle en fonction de k .

b) En déduire l'allure de S .

Exercice 4. Déterminer l'ensemble de définition et calculer les dérivées partielles des fonctions $f(x, y) = e^{xy} + \sqrt{x}$, $g(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ et $h(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Exercice 5. Soit $f(x, y)$ une fonction donnée et $x(t) = t^2 - 1$, $y(t) = t$. Exprimer la dérivée de la fonction $g(t) = f(x(t), y(t))$ en fonction des dérivées partielles de f . Vérifier ce résultat avec $f(x, y) = \cos(y^2 - x)$.

Exercice 6. Soit f la fonction définie par $f(x, y) = xy^2 + 3x^3y$.

a) Calculer les dérivées partielles de f .

b) Donner l'équation du plan tangent à la surface représentative de f au point de coordonnées $(1, -1)$.

Exercice 7. Déterminer l'équation du plan tangent à la sphère de centre O et de rayon 3 au point $(1, 2, 2)$. Indication: considérer la fonction $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Exercice 8. Déterminer la direction de plus grande pente de $f(x, y) = xy^2$ en $(2, 1)$.

Même question avec $g(x, y) = e^x \cos(y)$ en $(0, \frac{\pi}{4})$.

Exercice 9. Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la tangente en A à la courbe de niveau de la fonction f passant par le point A :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2, & A &= (1, 1); & f(x, y) &= xy^2, & A &= (-1, 1); \\ f(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2}, & A &= (1, 1); & f(x, y) &= x^2 - y, & A &= (1, 1). \end{aligned}$$