L2 SV-S3
2012-2013
Mathématiques

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

TD n°4: Calcul matriciel

Exercice 1. Effectuer les produits des matrices suivantes lorsque c'est possible:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soient

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les matrices suivantes lorsqu'elles ont un sens: AB, BA, $A+B$, BC, ABC, CB.

Exercice 3. Calculer de deux façons différentes le produit suivant:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer et comparer AB et BA.

Exercice 5. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 14 & -5 & 3 \\ 9 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les produits AB et BA. Que représente la matrice B pour la matrice A?

b) Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & - & 3y & + & 4z & = & 3 \\ -3x & & & + & 2z & = & -1 \end{array}\right.$.

Exercice 6. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer leur déterminant.

b) Calculer les matrices AB, BA ainsi que leur déterminant.

c) Comparer les déterminants des matrices A, B, AB et BA.

Exercice 7. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer AB et BA.

b) Calculer A^{-1} et B^{-1} s'ils existent.

Exercice 8. Calculer le déterminant et l'inverse (s'il existe) des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et le vecteur $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Montrer que V est un vecteur propre de A et préciser la valeur propre qui lui est associée.

Exercice 10. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$.

a) Calculer AV_1 et AV_2.
b) En déduire une expression explicite de A^nV_1 et A^nV_2 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
c) Exprimer V sous la forme $V = aV_1 + bV_2$ où a et b sont des nombres réels.
d) Calculer le vecteur A^nV pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. Pour chacune des matrices de l'Exercice 8
a) Calculer ses valeurs propres et ses vecteurs propres.
b) Trouver une matrice Q telle que $Q^{-1}AQ$ soit diagonale ou triangulaire. Que vaut $Q^{-1}AQ$? Même question pour les matrices B, C et D.