L2 MIPI - S3
2015/2016
Mathématiques: algèbre linéaire

TD n°4 : Diagonalisation et trigonalisation.

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E. Pour chacun des endomorphismes suivants: écrire sa matrice A dans la base $\mathcal{B}$, déterminer ses valeurs propres et les sous-espaces propres associés, dire s'il est diagonalisable et dans ce cas donner une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

a) $f_1(x_1e_1 + x_2e_2) = (x_1 + 4x_2)e_1 + (x_1 + x_2)e_2$.

b) $f_2(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1e_1$.

c) $f_3(x_1e_1 + x_2e_2) = (x_1 - x_2)e_1 + x_2e_2$.

d) $f_4(x_1e_1 + x_2e_2) = (x_1 + x_2)e_1 + (x_1 + x_2)e_2$.

e) $f_5(x_1e_1 + x_2e_2) = (2x_1 + 3x_2)e_1 + (-x_1 + x_2)e_2$.

Exercice 2. Même exercice que le précédent avec E de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et les endomorphismes suivants:

a) $f_1(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (2x_1 + 4x_3)e_1 + (3x_1 - 4x_2 + 12x_3)e_2 + (x_1 - 2x_2 + 5x_3)e_3$.

b) $f_2(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (-x_1 + x_2 + x_3)e_1 + (x_1 - x_2 + x_3)e_2 + (x_1 + x_2 - x_3)e_3$.

c) $f_3(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (-x_1 + x_2)e_1 - (x_2 + x_3)e_2 + (x_1 - x_3)e_3$.

d) $f_4(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (3x_1 + x_2 - x_3)e_1 + (2x_1 + 2x_2 - x_3)e_2 + (2x_1 + 2x_2)e_3$.

e) $f_5(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = -(4x_1 + 2x_3)e_1 + x_2e_2 + (5x_1 + x_2 + 3x_3)e_3$.

f) $f_6(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3) = (-9x_1+4x_2+4x_3)e_1+(-8x_1+3x_2+4x_3)e_2+(-16x_1+8x_2+7x_3)e_3$.

g) $f_7(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (6x_1 - 3x_2 - 2x_3)e_1 + (4x_1 - x_2 - 2x_3)e_2 + (10x_1 - 5x_2 - 3x_3)e_3$.

Exercice 3. Même exercice que le précédent avec E de dimension 4, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E et

$$\begin{aligned} f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4) &= (7x_1 + 4x_2)e_1 - (12x_1 + 7x_2)e_2 + (20x_1 + 11x_2 - 6x_3 - 12x_4)e_3 \\ &\quad +(-12x_1 - 6x_2 + 6x_3 + 11x_4)e_4. \end{aligned}$$

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Donner le polynôme caractéristque de l'application identité et l'application nulle de E.

Exercice 5. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure. Montrer que les valeurs propres de A sont ses entrées diagonales.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et φ l'endomorphisme défini par

$$\varphi(e_1) = e_1 + 2e_2 - e_3 \ , \ \varphi(e_2) = 3e_1 - e_3 \ , \ \varphi(e_3) = -3e_1 + 2e_2 + 3e_3.$$

a) Donner la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$. Calculer les valeurs propres de φ, ses sous-espaces propres et montrer que φ est diagonalisable.

b) Calculer A^n. Quel est l'image du vecteur $v = e_1 + e_2 + e_3$ par l'application $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$.

c) On donne les trois suite réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations de récurrence

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} u_{n+1} & = & u_n & +3v_n & -3w_n, \\ v_{n+1} & = & 2u_n & & +2w_n, \\ w_{n+1} & = & -u_n & -v_n & 3w_n, \end{array}\right.$$

et $u_0 = v_0 = w_0 = 1$. Déterminer u_n, v_n et w_n en fonction de n. Indication: quelle est la relation de récurrence vérifiée par le vecteur $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Soit $b \in \mathbb{R}$ et soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & b^2 & 2b^2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le polynôme caractéristique $\chi(\lambda)$ de la matrice M. Pour quelle(s) valeur(s) de b la matrice M est-elle inversible?

b) Vérifier que $\lambda_1 = -1$ est une valeur propre de M et trouver une base du sous-espace propre associé.

c) Trouver les autres valeurs propres de M et montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si $b \notin \{-3, 0, 3\}$.

d) Montrer que si $b \in \{-3, 0, 3\}$ la matrice M n'est pas diagonalisable. Trouver une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}MP$ soit triangulaire supérieure.

Exercice 8. Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$, on considère l'endomorphisme φ défini par

$$\varphi(P) = (X+1)(X-3)P' - XP.$$

a) Montrer que si $d^\circ P \geq 2$, P ne peut pas être vecteur propre de φ.

b) Déterminer les valeurs propres de φ et donner une base des sous-espaces propres associés.

Exercice 9. Une matrice N est dite nilpotente si il existe un entier k tel que $N^k = 0$. Montrer qu'une matrice diagonalisable est nilpotente si et seulement si elle est nulle. Indication: considérer d'abord le cas où la matrice est diagonale.

Exercice 10.

a) Soit E un espace vectoriel et f, g deux endomorphismes. Montrer que si $g \circ f = f \circ g$ (on dit que f et g commutent), alors les sous-espaces propres de f sont g stables, i.e. si λ est une valeur propre de f et si E_λ est le sous-espace propre associé alors $g(E_\lambda) \subset E_\lambda$, autrement dit $u \in E_\lambda \Rightarrow g(u) \in E_\lambda$.

b) Déterminer toutes les matrices M qui commutent avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Diagonaliser la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et utiliser ce qui précède pour déterminer toutes les matrices commutant avec B.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f, g \in End(E)$ des endormorphismes. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ ont les même valeurs propres.