L2 MIPI - S3
2015/2016
Mathématiques: algèbre linéaire

TD n°6: Produits scalaires et endomorphismes symétriques.

Exercice 1. Montrer que l'application $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\langle x, y\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - x_2 + x_3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - y_2 + y_3\right) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) + 3x_3y_3$$

est un produit scalaire et en donner une base orthonormée.

Exercice 2. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ les formes bilinéaires symétriques ci-desssous définissent-elles un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1$.

b) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 10x_2y_2 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + \lambda x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2$.

c) $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1 + 8x_2y_2 + 3x_3y_3 + \lambda x_2y_3 + \lambda x_3y_2$.

Exercice 3. Sur $\mathbb{R}^2[X]$, on définit, pour $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2$,

$$\langle P, Q\rangle = (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2.$$

a) Montrer que c'est un produit scalaire.

b) Déterminer une base orthonormée.

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}^4$ de la forme bilinéaire B définie, dans la base canonique, par

$$B(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 + 18x_4y_4 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_4 + 2x_4y_2 + 6x_3y_4 + 6x_4y_3.$$

a) Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

b) Ecrire la matrice de B dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

c) Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_2 - 2x_4 &= 0 \end{cases}$$

Déterminer $F^\perp$ et vérifier que $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^4$.

Exercice 5. On considère les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ et $v_3 = (0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, i.e. $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_iy_i$.

a) Vérifier que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt pour transformer $\mathcal{B}$ en une base orthonormée.

Exercice 6. Même exercice que le précédent avec les vecteurs $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$.

Exercice 7. On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $v_1 = (1,1,0)$ et $v_2 = (1,2,1)$.
a) A l'aide du procédé d'orthogonalisation de Schmidt déterminer une base orthonormée de F.
b) Compléter cette base en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 9. Soit E un espace de dimension fini n muni d'un produit scalaire et F un sous-espace de E. On note $F^\perp$ l'orthogonal de F pour ce produit scalaire. Le but de l'exercice est de montrer que $F \oplus F^\perp = E$.
a) Montrer que $F \cap F^\perp = \{0\}$.
b) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_p)$ de F.
c) Montrer que l'on peut compléter $(e_1, \ldots, e_p)$ en une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E.
d) Montrer que pour tout $j > p$ on a $e_j \in F^\perp$. Conclure.

Définition: Si E est un ev de dimension fini muni d'un produit scalaire et F un sous-espace de E, on appelle projection orthogonale sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$, c'est-à-dire l'application linéaire $p : E \to E$ définie par: si $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$ alors $p(x) = y$.

Exercice 10. On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire usuel. Soient $e_1 = (1,0,1,0)$, $e_2 = (1,-1,1,-1)$ et $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.
a) Déterminer une base orhonormale de F et l'étendre en une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$.
b) Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ du projecteur orthogonal sur F.

Exercice 11. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel.
a) Déterminer l'orthogonal du plan vectoriel $x + 2y - 3z = 0$.
b) Déterminer la matrice qui représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ la projection orthogonale sur le plan $x + 2y - 3z = 0$.

Exercice 12. Soit $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 4x_3x_4$. On note $W \subset \mathbb{R}^4$ le sous-espace défini par

$$W = \{x \,|\, x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \;\text{ et }\; x_1 + x_2 = 0\}\,.$$

a) Déterminer $W^\perp$ puis $W \cap W^\perp$.
b) A-t-on $W \cap W^\perp = \{0\}$? $W + W^\perp = \mathbb{R}^4$? Que peut-t-on en déduire sur la forme quadratique Q?
c) Ecrire la matrice de la forme polaire de Q dans la base canonique. Quel est son rang? sa signature?
d) Déterminer le cône isotrope de Q.

Exercice 13. Diagonaliser chacune des matrices symétriques suivantes dans une base orthonormée.
a) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. **b)** $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. **c)** $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.