L2-S3 MPI
2007-2008
Mathématiques-Analyse dans $\mathbb{R}^n$

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

TD n°3: Différentiabilité

Vrai ou faux ?

Dans la suite, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction.

(a) Si f admet des dérivées partielles en $a \in \Omega$, alors f est différentiable en a.
(b) Si f admet des dérivées partielles en $a \in \Omega$, alors f est continue en a.
(c) Si f est différentiable en tout point de Ω, alors f est de classe C^1 sur Ω.
(d) Si $a \in \Omega$ est un point tel que $Df(a) = 0$, alors f admet un extremum local en a.

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, puis calculer leurs dérivées partielles:

$$f(x,y,z) = \frac{\sin(xz)}{z^4+y^2+1} + z^{2007}e^{x^2+y^3}, \quad g(x,y) = \arccos\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right), \quad h(x,y) = \|(x,y)\|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

Exercice 2. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 1$ si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, et $f(x,y) = 0$ sinon. Etudier la continuité de f. Admet-elle des dérivées partielles d'ordre 1 en $(0,0)$? Que peut-on obtenir comme conclusion?

Exercice 3. Soit $f(x,y) = \frac{xy}{y-x}$ pour $x \neq y$ et $f(x,x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) Quel est le domaine de définition de cette fonction?
b) Montrer que les dérivées partielles de f existent en $(0,0)$.
c) Est ce que f est continue en $(0,0)$?
d) Est ce que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ existe?

Exercice 4. Etudier la continuité et la différentiabilité des fonctions suivantes:

$$f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2} + \cos(x) \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 1,$$

$$g(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad g(0,0) = 0.$$

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{2x^3+y^3+2xy^2+yx^2+x^2y^2}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

a) Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et les calculer.
b) Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ et calculer sa différentielle en ce point.

Exercice 6 (Examen 06)**.** Soient $p, q \in \mathbb{N}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^p y^q}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0,$$

avec la convention que si $p = 0$ alors $x^0 = 1$ pour tout x, et que si $q = 0$ alors $y^0 = 1$ pour tout y. Pour quelles valeurs de p et de q la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Différentiable sur $\mathbb{R}^2$? C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x,y) = f(x^2+y^2)$. Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$y\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Exercice 8. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x,y) = e^{x^2-y} \text{ si } x^2 < y \quad \text{et} \quad g(x,y) = 1 \text{ si } x^2 \geq y.$$

Déterminer l'ensemble des points (x,y) tels que les dérivées partielles existent, puis déterminer l'ensemble des points en lesquels g est différentiable. Même questions pour la fonction f définie par

$$f(x,y) = \tanh\left(\frac{x^2}{y^2}\right) \text{ si } y \neq 0 \quad \text{et} \quad f(x,0) = 1.$$

Exercice 9. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} \text{ si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0,0) = 0$$

est continue, admet des dérivées partielles en tout point mais n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4$.

a) Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé les ensembles $L_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x,y) = 0\}$ et $L_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x,y) = 5\}$.

b) Représenter dans l'espace muni d'un repère orthonormé le graphe de f,

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = f(x,y)\}$$

c) En écrivant un DL_1 de f en $(1,2)$, déterminer le plan tangent à Γ en $(1,2,1)$.

Exercice 11. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = y^2 \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) \text{ si } y \neq 0 \quad \text{et} \quad f(x,0) = 0.$$

Déterminer le domaine où la fonction g est continue, différentiable, de classe C^1, deux fois différentiables, de classe C^2. Calculer ses derivées partielles mixtes d'ordre 2 en $(0,0)$ et commenter le résultat du point de vue du théorème de Schwarz.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f est homogène de degré α si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $y \in \mathbb{R}$, tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y).$$

a) Montrer qu'une fonction différentiable et homogène de degré $\alpha \neq 0$ a des dérivées partielles homogènes de degré $\alpha - 1$.

b) Soit f une fonction homogène de degré α et de classe C^1. Montrer que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f. \tag{$*$}$$

c) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant $(*)$. En étudiant $g(t) = t^{-\alpha} f(tx,ty)$, montrer que f est homogène de degré α.

Exercice 13 (Examen 05)**.** On considère la fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + x^4y^2 \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} f(0,0) = 0.$$

a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et calculer leurs valeurs. Que peut on en déduire pour f?