L2-S3 MPI
2007-2008
Mathématiques-Analyse dans $\mathbb{R}^n$

TD n°4: Différentiabilité et problèmes d'extrema

Vrai ou Faux ?

Dans la suite, Ω désigne un de ouvert $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction.

a) Si f admet toutes les dérivées partielles d'ordre deux en $a \in \Omega$, alors f est différentiable en a.
b) Si f admet toutes les dérivées partielles d'ordre deux en $a \in \Omega$, alors f est continue en a.
c) Si f admet un développement limité d'ordre 1 en $a \in \Omega$, alors f est différentiable au point a.
d) Si f admet des dérivées partielles d'ordre 1 nulles en $a \in \Omega$, alors c'est un extrémum local.
e) Si f admet un développement limité d'ordre deux en $a \in \Omega$, alors f a toutes les dérivées partielles d'ordre deux en a.

Exercice 1 (Partiel 2003)**.** Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = x\arctan(y/x)$ si $x \neq 0$, et $f(0,y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
b) Calculer les dérivées partielles de f quand elles existent.

Exercice 2. Donner un DL de
a) $f(x,y) = x^y$ à l'ordre 2 en $(1,0)$;
b) $f(x,y,z) = (1+x)^{\frac{1}{2}}(1+y)^{-\frac{1}{2}}(1+z)^{-1}$ à l'ordre 1 en $(3,3,5)$.

Exercice 3 (Examen 2006)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \arctan(x^2) + 3xe^y + xy^2 + \sin(x+y^2).$$

Donner un DL à l'ordre 2 de f en $(0,0)$.

Exercice 4. Déterminer les extrema locaux des applications suivantes:
a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + x^3$.
b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = (x^2+y^2-8)(x^2+y^2)$.
c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.
d) $i : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $i(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
e) $j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $j(x,y) = e^{x\sin y}$.

Exercice 5 (Examen 2006)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27.$$

a) Trouver les points critiques de f.
b) Parmi ces points, lesquels sont des extréma locaux?
c) Est ce que f possède un maximum global ou un minimum global?

Exercice 6. Une boite rectangulaire (ouverte en haut) a pour volume 32 cm^2. Trouver les dimensions de la boite pour lesquelles la surface totale de la boite est minimale.

Exercice 7. Trouver le point du plan $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - 2y + z = 15\}$ le plus proche de l'origine.

Exercice 8. Soit $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ telle que si $(x, y) \neq (1, 1)$, $f(x, y) = \dfrac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}$, $f(1, 1) = 0$.

a) Montrer que f est continue sur $\Omega = [0, 1]^2$.

b) Justifier l'existence et déterminer les valeurs de $\max_\Omega f$ et $\min_\Omega f$.

Exercice 9 (Partiel 2003)**.** Soit $f : \Omega = [-1, 1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x, y) = (y - x)^3 + 6xy$.

a) Montrer que f admet un maximum et un minimum sur Ω (sans chercher à calculer la valeur de ces extréma).

b) Rechercher si f admet un extrémum relatif dans $]-1, 1[^2$.

c) Déterminer $\min_\Omega f$ et $\max_\Omega f$.

Exercice 10 (Examen 2006 - 2e session)**.** Soient α, β deux nombres strictement positifs tels que $1+2\alpha = \beta$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction réelle définie par $f(x, y) = x^2+\alpha x^4+2\beta(1+x)y^2$.

a) Trouver les points critiques de f.

b) Parmi ces points, lesquels sont des extréma locaux?

c) Est ce que f possède un maximum global ou un minimum global?

Exercice 11. Soit $f : \Omega = [0, \pi]^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + \cos(x + y)$.

a) Déterminer les points critiques de f sur $]0, \pi[^2$.

b) Déterminer les éventuels extrema locaux de f sur $]0, \pi[^2$.

c) Montrer que f admet un minimum et un maximum global sur Ω, et les déterminer.