L2 MIPI - S3
2015/2016
Mathématiques: intégration

TD n°1 : Intégration de fonctions continues par morceaux

Exercice 1. Dessiner le graphe de $E(t)$, la partie entière t, sur $[-1,3]$. En utilisant la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier, calculer $\int_{-1}^{3} E(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 2.
a) (Inégalité de Cauchy–Schwarz) Soient $a<b$ dans $\mathbb{R}$ et $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues par morceaux. On suppose que g n'est pas identiquement nulle. Soit $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ défini par

$$P(t) \;=\; \int_a^b \big(f(x)\;+\;tg(x)\big)^2\,\mathrm{d}x.$$

(1) Montrer que P est un polynôme du second degré. Que vaut son discriminant ?
(2) Étudier le signe de P. En déduire l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$\Big|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\Big| \;\le\; \Big(\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\cdot\Big(\int_a^b g(x)^2\mathrm{d}x\Big)^{1/2}. \tag{1}$$

(3) Montrer que si f et g sont continues, alors (**??**) est une égalité si et seulement si il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $f=\lambda g$.

On remarque que (**??**) est encore vraie si g est identiquement nulle.
b) (Formule de Minkowski) En déduire

$$\Big(\int_a^b |f+g|^2\Big)^{1/2} \le \Big(\int_a^b |f|^2\Big)^{1/2} + \Big(\int_a^b |g|^2\Big)^{1/2}.$$

Exercice 3. (Première formule de la moyenne) Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues, avec f positive.

a) Montrer qu'il existe $c\in\,]a,b[$ tel que $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = (b-a)g(c)$. Indication: penser au Théorème des Accroissements Finis.

b) Démontrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = g(c)\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Indication: on commencera par montrer que

$$\min_{t\in[a,b]} g(t)\times\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \le \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \le \max_{t\in[a,b]} g(t)\times\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 4. Calculer les limites suivantes en utilisant des sommes de Riemann.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^3.$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n+3k}.$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right).$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{2n+3k}.$

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\prod_{k=1}^{n} k^{-4k/n^2}.$

Exercice 5. **(Annale contrôle continu 2012)** Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par, pour tout $n > 0$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{7n-2k} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{7n-2k}+\frac{k}{n^4}\right).$$

Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite. En déduire l'existence et la valeur de la limite de $(v_n)_n$.

Exercice 6. **(Annale contrôle continu 2008)** Pour tout n fixé, on se donne une famille $(y_k^{(n)})_{0\le k\le n-1}$ telle que $y_k^{(n)} \in \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$. On pose alors

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n(1+y_k^{(n)})}.$$

a) Montrer que la suite $(U_n)_n$ est une somme de Riemann dont on précisera les éléments caractéristiques, c'est-à-dire la fonction et l'intervalle correspondants.

b) En déduire que la suite $(U_n)_n$ converge et préciser sa limite.