L2 MIPI - S3
2014/2015
Mathématiques: intégration

TD n°6 : Intégrales curvilignes

Exercice 1. Calculer l'intégrale curviligne $I = \displaystyle\int_\Gamma xydx + xdy$ lorsque :

a) Γ est la courbe définie par $\{(x,y),\ y \geq 0, x^2+y^2=1\}$ parcourue dans le sens trigonométrique.
b) Γ est la courbe définie par $\{(x,y),\ y = 1-x^2, -1 \leq x \leq 1\}$.

Exercice 2. Calculer l'intégrale curviligne $I = \displaystyle\int_\Gamma x^2dx + y^2dy$ lorsque Γ est la courbe définie par $\{(x,y),\ y > 0, x^2+4y^2-4=0\}$ parcourue dans le sens direct.

Exercice 3. Calculer l'intégrale curviligne $I = \displaystyle\int_\Gamma \frac{x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}dy$ lorsque Γ est le contour du carré $ABCD$ avec $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,-1)$ et $D(1,-1)$ parcouru dans le sens direct.

Exercice 4. Calculer l'intégrale curviligne $I = \displaystyle\int_\Gamma ydx + 2xdy$ lorsque Γ est le contour du domaine défini par $\{(x,y),\ x^2+y^2-2x \leq 0,\ x^2+y^2-2y \leq 0\}$ parcouru une fois dans le sens direct.

Exercice 5. **(Annales 2008)** On considère le domaine suivant :

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 - 1 \leq y^2 \leq x\}.$$

On note Γ^+ le bord de Ω orienté dans le sens positif.
a) Étude de Ω.

(1) Donner la nature des deux domaines suivants :

$$\Gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 - y^2 = 1\}, \Gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = y^2\}.$$

(2) Dessiner Γ_1, Γ_2 et Ω sur une même figure (avec $(x,y) \in [-1,2] \times [-2,2]$).

On se propose de calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{\Gamma^+} x\mathrm{d}x + yx^2\mathrm{d}y.$$

b) Montrer que $I_1 := \int_{\Gamma^+} x\mathrm{d}x + 0\mathrm{d}y = 0$.
c) On en déduit que $I = \int_{\Gamma^+} 0\mathrm{d}x + yx^2\mathrm{d}y$.

(1) Énoncer la formule de Green–Riemann.
(2) En déduire qu'il existe une fonction f que l'on précisera telle que

$$I = \iint_\Omega f(x,y)dxdy.$$

(3) Que se passe-t-il si on fait le changement de variables $u = x$ et $v = -y$?

(4) Calculer I. On pourra éventuellement utiliser, en le justifiant, que

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\int_{y^2}^{\sqrt{\frac{y^2+1}{2}}} f(x,y)dx \right) dy.$$

Exercice 6. (Annale 2009 Soit $\Gamma = \{(x,y),\ x > 0,\ |y| \leq 2,\ (x-1)^2 - 3y^2 = 1\}$. On note $A(3,-1)$ et $B(3,1)$.

a) Donner la nature de Γ et la dessiner.
b) Donner une paramétrisation de Γ allant de A à B.
c) Calculer l'intégrale curviligne

$$I = \int_\Gamma \frac{1}{x-1}dx + \frac{y}{x-1}dy.$$

Exercice 7. (Annale 2007) On considère le domaine suivant :

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq 4x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

a) Étude de Ω.

(1) Pour $k > 0$, donner la nature du domaine $\Gamma_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 4x^2 + y^2 = k^2\}$.
(2) Dessiner Γ_1, Γ_3 et Ω sur une même figure.
(3) On note $\Omega_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 4x^2 + y^2 \leq k^2\}$. Pour toute fonction continue f définie sur $\mathbb{R}^2$, exprimer $\iint_\Omega f(x,y)dxdy$ en fonction de $\iint_{\Omega_1} f(x,y)dxdy$ et $\iint_{\Omega_3} f(x,y)dxdy$.

On se propose de calculer l'intégrale suivante :

$$I = \iint_\Omega \sqrt{4x^2 + y^2}dxdy.$$

b) Calcul de $J = \iint_{\Omega_1} \sqrt{4x^2 + y^2}dxdy$.

(1) Énoncer la formule de Green–Riemann.
(2) Montrer que $J = \dfrac{1}{3} \displaystyle\int_{\Gamma_1^+} -y\sqrt{4x^2+y^2}dx + x\sqrt{4x^2+y^2}dy$.
(3) Donner un paramétrage de Γ_1^+.
(4) Calculer J avec ce paramétrage.

c) Calcul de $K = \iint_{\Omega_3} \sqrt{4x^2 + y^2}dxdy$. (On se propose d'utiliser une autre méthode que celle pour J.)

(1) Énoncer le théorème de changement de variable en dimension 2.
(2) On définit $F(x,y) = (2x, y)$, montrer que F est une bijection de Ω_3 dans $B(0,3)$, le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 3. Calculer le jacobien de F.
(3) Montrer que $K = \dfrac{1}{2} \displaystyle\iint_{B(0,3)} \sqrt{u^2+v^2}dudv$.
(4) Énoncer la formule de changement de variable en polaire.
(5) Calculer K en utilisant un changement de variable en coordonnées polaires.

d) En déduire I.

Exercice 8. Montrer que la forme différentielle

$$\omega = \frac{(1-x^2)dy + 2xydx}{(1-x^2)^2 + y^2},$$

est exacte sur son domaine de définition. Déterminer une primitive de ω, c'est-à-dire une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $df = \omega$.

Exercice 9. Soit Γ la courbe plane d'équation $x^2 + y^2 = R^2$. On note $\omega = ydx + xydy$.

a) Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\Gamma \omega$.

b) Retrouver la valeur de l'intégrale précédente en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 10. (Annale 2006) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ de bord orienté dans le sens positif Γ_+. Soit ω la forme différentielle définie sur U par

$$\omega = (-y/2 - xy + y^3/3)dx + (x/2 - x^2/2 + xy^2)dy.$$

Montrer que $\displaystyle\int_{\Gamma_+} \omega$ est égale à l'aire de U.