Université de Cergy Pontoise
Licence de Mathématiques L3M
Méthodes variationnelles
2009-2010

Feuille de TD 8
Euler Lagrange

Exercice 1. Pour chacune des fonctions f_i suivantes définie sur $\mathcal{C}^0[0,1]$ munie de la norme infinie, calculer sa différentielle :

$$f_1(y) = \int_0^1 y(x)\sin x\,\mathrm{d}x, \quad f_2(y) = \int_0^1 \sin(y(x))\,\mathrm{d}x,$$
$$f_3(y) = \int_0^{\pi/2} y(\sin x)\,\mathrm{d}x, \quad f_4(y) = y\left(\int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x\right) .$$

Exercice 2. Soient $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, $\mathcal{A} = \{h \in E \,|\, h(0) = 1,\, h(1) = 4\}$, $E_0 = \{h \in E \,|\, h(0) = 0,\, h(1) = 0\}$, munis de la norme habituelle $\|y\|_{C^1} = \|y\|_\infty + \|y'\|_\infty$, et pour tout y de $\mathcal{A}$,

$$f(y) = \int_0^1 y(x)\,(y'(x))^2\;\mathrm{d}x$$

a) E, $\mathcal{A}$ et E_0 sont-ils des espaces vectoriels ?
b) Montrer que f est différentiable en $y \in \mathcal{A}$ et déterminer une expression pour $(f'(y))(h)$.
c) Soient les fonctions u et v définies sur $[0;1]$ par $u(x) = 1 + 3x$ et $v(x) = 1 + 3x^2$. Appartiennent-elles à $\mathcal{A}$? Les représenter puis calculer $f(u)$ et $f(v)$.

Supposons dorénavant que y est un point critique de f avec les contraintes $f(0) = 1$ et $f(1) = 4$.
d) Déterminer l'équation d'Euler-Lagrange pour y, la résoudre sur le sous ensemble de $\mathcal{A}$ des fonctions strictement positives.
e) Représenter la fonction y trouvée et calculer $f(y)$.
f) Retrouver la même solution en utilisant la fonction de Hamilton, on se placera sur $\mathcal{A}$ tout entier et on montrera qu'une solution est forcément strictement positive.
g) Montrer que f n'est pas majorée sur $\mathcal{A}$, on pourra considérer $h_n(x) = 1 + 3x^n$.

Exercice 3. On définit les fonctions f_i par $f_i(y) = \int_a^b F_i(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x$ dans les cas suivants :

$$F_1(x,y,p) = \sqrt{1+p^2}, \quad F_2(x,y,p) = \tfrac{1}{2}p^2 + \cos y,$$
$$F_3(x,y,p) = \frac{\cos p}{1-y}, \quad F_4(x,y,p) = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2y}}.$$

a) Écrire l'équation d'Euler-Lagrange pour chacune des fonctions f_i.
b) Pour les F_i ci-dessus tel que $\partial F_i/\partial x = 0$, écrire la fonction hamiltonienne $H(x,y,p)$ ainsi que l'équation $H(x, y(x), y'(x)) = H_0$ où H_0 est une constante.
c) Résoudre cette dernière équation pour F_1.
d) Pour F_4, vérifier que

$$\begin{cases} x(t) = \gamma(\omega t - \sin\omega t) \\ y(t) = \gamma(1 - \cos\omega t) \end{cases}$$

avec γ, ω constants, est bien solution de l'équation.
Trouver les valeurs de γ, ω telles que $x(0) = 0$, $x(T) = 1$, $y(0) = y(T) = 0$.

Exercice 4. (Examen 2007) Soit $E = C^1([-1,1])$ muni de la norme habituelle $\|y\|_{C^1} = \|y\|_\infty + \|y'\|_\infty$. Soit $\mathcal{E} = \{y \in E \mid y(x) > 0,\ \forall x \in [-1,1]\}$. On définit $f(y) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{y(x)}\, dx$ pour $y \in \mathcal{E}$.

a) Montrer que f est différentiable en $y \in \mathcal{E}$ et déterminer une expression pour $(f'(y)).(\delta y)$, la dérivée de f en $y \in E$ dans une direction $\delta y \in E_0 \equiv \{\delta y \in E : \delta y(-1) = \delta y(1) = 0\}$.

Supposons dorénavant que $y \in \mathcal{E}$ est un point critique de f avec les contraintes $y(-1) = y(1) = 1$.

b) Déterminer l'équation d'Euler-Lagrange pour y.

c) En utilisant l'invariant de Hamilton, trouver une équation différentielle, d'ordre 1 pour y.

d) Construire une solution comme courbe paramétrée : $x(t) = a + r \sin t$, $y(t) = b + r \cos t$, où a, b et r sont des constantes à déterminer et pour t appartenant à un intervalle à préciser.