Université de Cergy Pontoise
Licence de Mathématiques L3M
Méthodes variationnelles
2009-2010

Feuille de TD 4
Points critiques. Dérivées secondes, application à la recherche d'extrema

Exercice 1. Soit $U = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ |||M||| < 1\}$. On définit les fonctions

$$F : [0,1] \times U \to \mathbb{R},\ F(t,A) = tr\left((I+tA)^{-1}\right) \text{ et } f : U \to \mathbb{R},\ f(A) = \int_0^1 F(t,A)\mathrm{d}t.$$

a) Justifier que F est bien définie.
b) Justifier (ou admettre) que F est de classe C^1 sur $[0,1] \times U$.
c) Calculer $F'_A(t,A)$ la différentielle de F par rapport à la variable A au point (t,A).
d) Justifier que f est différentiable sur U et calculer $f'\left(\frac{1}{2}I\right)$.

Exercice 2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_a^b f(s)h(s)\,ds \;=\; 0$$

pour toute fonction continue $h : [a,b] \to \mathbb{R}$. Montrer que $f(s) = 0$ pour tout $s \in [a,b]$.

Exercice 3. On munit $C^0([1,2];\mathbb{R})$ de la norme infinie et $C^0([1,2];\mathbb{R}) \times [1,2]$ de la norme $\|(f,t)\| = \max(\|f\|_\infty, |t|)$. On définit $\varphi : C^0([1,2];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ et $F, G : C^0([1,2];\mathbb{R}) \times [1,2] \to \mathbb{R}$ par $\varphi(f) = \displaystyle\int_1^2 f(x)\exp(-xf(x))\,\mathrm{d}x$, $\quad F(f,x) = f(x)\exp(-xf(x))$, $\quad G(f,x) = f(x)$

(1) Montrer que G est continue, en déduire que F est continue.
(2) Montrer que F admet une différentielle partielle par rapport à f, la calculer.
(3) Montrer que F'_f est continue.
(4) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer sa différentielle.
(5) Déterminer le(s) point(s) cr etitique(s) de φ.

Exercice 4. Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \to \mathrm{tr}({}^t\!AA + {}^tBA)$. Calculer la différentielle de φ et déterminer ses points critiques.

Exercice 5.
a) Écrire le DL_2 de la fonction $(x,y) \mapsto x^2 - y^2 + e^{xy}$ en $(0,0)$ et puis en $(1,-1)$.
b) Soit $H(x,y,z) = x - 2004y + z - e^{xyz}$, exprimer $H'(0,0,0)$ et $H''(0,0,0)$ sans calculer les dérivées partielles.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = -x + xy^2$.
a) Déterminer les points critiques de f.
b) Calculer la hessienne pour chaque point critique.
c) Déterminer si f a des extrema locaux.

Exercice 7. Trouver les points critiques et évaluer leurs natures pour les fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = (1-x)(1-y)(1-x-y), \quad f_2(x,y) = (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(2x^2+3y^2)}.$$