Université de Cergy Pontoise
Licence de Mathématiques L3M
Méthodes variationnelles
2009-2010

Feuille de TD 6
Théorème des fonctions implicites

Exercice 1. Soit Σ la surface d'équation $xy - z\ln y + e^{xy} + z = 2$.

a) Montrer que Σ peut être représentée au voisinage de $(0, 1, 1)$ sous la forme $z = f(x, y)$. Déterminer la différentielle de f en $(0, 1)$.

b) Montrer que Σ peut être repésentée au voisinage de $(0, 1, 1)$ aussi sous la forme $x = g(y, z)$. Déterminer la différentielle de g en $(1, 1)$.

c) Montrer que Σ peut être représentée au voisinage de chacun de ses points (x_0, y_0, z_0), soit sous la forme $z = f(x, y)$ soit sous la forme $x = g(y, z)$.

Exercice 2.

a) Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + \sin x$ admet une fonction inverse locale g satisfaisant $g(0) = 0$. Donner le développement limité de g d'ordre 2 en $y_0 = 0$.

b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to y\cos x + x^2 + y^2$. Montrer que l'équation $f(x, y) = 0$ au voisinage de $(x_0, y_0) = (0, 0)$ détermine implicitement une fonction $y = g(x)$ de classe C^∞ dans un voisinage ouvert de $x_0 = 0$. Donner le développement limité de g d'ordre 2 en $x_0 = 0$.

c) Refaire b) pour $f(x, y) = x - \cos(xy) - \sin(xy)$ au voisinage de $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Exercice 3. Montrer que le système $\begin{cases} e^x + yz^2 + t = 2 \\ \sin x + y^2 z + t^3 = 1 \end{cases}$ définit de façon unique au voisinage de $(x, y, z, t) = (0, 0, 2, 1)$ deux fonctions de la forme $x = x(y, z)$, $t = t(y, z)$.

Exercice 4. Montrer qu'il existe U, voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ et une unique application $z : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, qui s'annule en $(0, 0)$ tel que $e^{z(x,y)} = (1 + xe^{z(x,y)})(1 + ye^{z(x,y)})$ pour tout $(x, y) \in U$. Déterminer ensuite $Dz(0, 0)$ et $D^2z(0, 0)$.

Exercice 5. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = z^4 - x^4 - 2z^2 + x^2 - y^2 - 1$.

a) Montrer que pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, l'équation $f(x, y, z) = 0$ possède une unique solution $\psi(x, y)$, strictement positive.

b) Montrer que la fonction ψ ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$.

c) Déterminer les points critiques de ψ.

d) Étudier les extrema globaux de ψ, interpréter par rapport à la surface $f = 0$.

Exercice 6. Montrer que l'intersection des deux surfaces $x^2(y^2+z^2)-5 = 0$ et $(x-z)^2+y^2 = 2$ passe par $a = (1, -1, 2)$, et au voisinage de a, la courbe d'intersection s'écrit sous la forme $y = f(x)$ et $z = g(x)$. Donner l'équation de la tangente au point a.

Exercice 7. Soit $f_\lambda(x, y) = xy + x^4 - y^4 + \lambda\sin(\lambda x) - \lambda^2 y$.

a) Montrer qu'il existe un unique point critique pour f_0, quelle est sa nature ?

b) En utilisant le Théorème des fonctions implicites, montrer qu'il existe $\alpha, \epsilon > 0$ tels que pour tout $|\lambda| < \epsilon$, f_λ admet un unique point critique $(x(\lambda), y(\lambda))$ dans le disque $B(0, \alpha) \subset \mathbb{R}^2$.

c) Quelle est la nature de ces points critiques, pour $|\lambda|$ suffisamment petit ?

d) Calculer $x'(0)$ et $y'(0)$.