L3 MPI
2008-2009
Mathématiques

TD n°1: Espace de probabilité et analyse combinatoire

Exercice 1. On lance 4 dés, bien équilibrés.
a) Décrire un modèle probabiliste associé à cette épreuve.
b) Calculer la probabilité pour que le même numéro apparaisse sur les 4 dés.
c) Calculer la probabilité pour que les numéros qui apparaissent sur les dés soient distincts deux à deux.

Exercice 2. On considère un jeu de 32 cartes dans lequel on tire au hasard 3 cartes.
a) Décrire un modèle probabiliste associé à cette épreuve.
b) Calculer la probabilité que les 3 cartes tirées soient des as.
c) Calculer la probabilité que les 3 cartes tirées soient de même hauteur.
d) Calculer la probabilité que les 3 cartes tirées soient trois coeurs.
e) Calculer la probabilité que les 3 cartes tirées soient de hauteurs deux à deux différentes.

Exercice 3. Soit P une probabilité sur un espace Ω fini non vide et A, B, C trois événements de $\mathcal{P}(\Omega)$. On suppose que $P(A) = 0,6$, $P(A \cap B) = 0,2$, $P(B \cap C) = 0,1$ $P(A \cap C) = 0,1$ $P(A \cap B \cap C) = 0,05$.
a) Déterminer la probabilité des évènements: $E_1 = A \cup (B \cap C)$, $\quad E_2 = A \cap (B \cup C)$.
b) Avec en outre $P(B) = 0,4$, calculer la probabilité pour que ni A ni B ne se produisent.

Exercice 4. Combien de nombres distinctes de 4 chiffres peut-on former en n'utilisant que les chiffres 2, 4, 5, 7, 8? Même question avec 0, 1, 2, 3, 4.

Exercice 5.
a) Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $\{1, 2, \dots, n\}$ dans $\{1, 2, \dots, m\}$?
b) Combien y a-t-il d'applications surjectives de $\{1, 2, \dots, n+1\}$ dans $\{1, 2, \dots, n\}$?

Exercice 6. Une urne contient n_1 boules rouges et n_2 boules blanches. On tire au hasard $k_1 + k_2$ boules. Quelle est la probabilité d'obtenir k_1 boules rouges et k_2 boules blanches?

Exercice 7.
a) On lance une pièce non biaisée. Quelle est la probabilité d'obtenir face pour la première fois au k-ième lancer?
b) On lance un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 pour la première fois au k-ième lancer?

Exercice 8. Quelle est la probabilité d'amener au moins une fois 6 en n coup de dés? Combien faut-il coup de dés pour que cette probabilité soit supérieure à $1/2$?

Exercice 9. Si on jette n fois deux dés, quelle est la probabilité d'amener au moins une fois un double 6? Trouver la valeur minimale de n telle que cette probabilité soit supérieure à $1/2$.

Exercice 10. On constitue une file d'attente en attribuant au hasard des numéros d'ordre à n personnes. Quelle est la probabilité que deux amis soient distants de r places (c'est à dire séparés par $r-1$ personnes). On résoudra l'exercice en utilisant trois modélisations différentes:

a) $\Omega = \{(k_1, k_2) \mid k_1 \neq k_2\}$.
b) $\Omega = \{\{k_1, k_2\} \mid k_1 \neq k_2\}$.
c) $\Omega = \{(k_1, k_2, \ldots, k_n) \mid \forall i, j,\ i \neq j \Longrightarrow k_i \neq k_j\}$.

⋆ **Exercice 11.** Sur un quadrillage $\{0, \ldots, n\}^2$ on s'intéresse aux chemins allant de $(0,0)$ à (n,n) tels qu'à chaque étape on fait soit un pas vers la droite soit un pas vers le haut.

a) Combien y a-t-il de tels chemins?

b) Combien y a-t-il de tels chemins qui passent par le point $(k, n-k)$?

c) Montrer que $C_{2n}^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$.

⋆ **Exercice 12.**

a) Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire successivement sans remise n $(1 \leq n \leq N)$ boules de l'urne. Comment peut-on modéliser l'ensemble des résultat possible à l'aide d'un ensemble Ω? Calculer card(Ω).

Désormais, on suppose que les résultats possibles sont équiprobables. Les boules numérotées de 1 à M sont rouges $(M < N)$ et les boules numérotées de $M+1$ à N sont blanches. On note A_k l'événement "la k-ème boule tirée est rouge".

b) Calculer $P(A_k)$.

c) Calculer $P(A_k \cap A_l)$.

⋆ **Exercice 13.** Dans un trousseau de n clés, seule une des clés ouvre une certaine porte. En choisissant, une après l'autre, les clés au hasard, quelle est la probabilité de réussir à ouvrir la porte au k-ème essai?

⋆ **Exercice 14.** On trace au hasard une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus petite que le côté du triangle équilatéral inscrit:

a) Si on suppose que la direction de la corde est donnée et qu'on choisit uniformément sa distance au centre?

b) Si on suppose que l'une des extrémités de la corde est fixée et qu'on choisit uniformément la direction de la corde dans l'intervalle $[0, \pi]$?