L3 MPI
2008-2009
Mathématiques

TD n°2: Conditionnement et indépendance

Exercice 1. On lance un dé rouge et un dé noir tous deux équilibrés. Calculer les probabilités que l'on obtienne:

a) Un 3 avec le dé rouge sachant que la somme des points est 6.

b) Un nombre pair avec le dé rouge sachant que la somme des points est 6.

c) Un nombre pair avec le dé rouge sachant que la somme des points est au plus 6.

d) Au moins un nombre pair sachant que la somme des points est au plus 10.

Exercice 2. On jette 2 fois un même dé. Soient A, B et C les évènements suivants:

a) $A =${la sommes des points obtenus vaut 6}, $B =${On obtient 4 au premier jet}, $C =${la sommes des points vaut 7}.

b) $A =${le 1 er jet est impair}, $B =${le 2 ème jet est impair}, $C =${la somme des points est impaire}.

Dans chacun des cas a) et b) dire si les évènements A, B et C sont indépendants 2 à 2, puis s'ils sont indépendants ("dans leur ensemble").

Exercice 3. On suppose que dans une région la proportion de moutons ayant une certaine maladie est de 1%. Si le mouton n'est pas atteint, il a 9 chances sur 10 d'être négatif à un test T. S'il est atteint, il a 8 chances sur 10 d'être positif à ce test.

Quelle est la probabilité pour qu'un mouton pris au hasard et ayant un test positif soit atteint par cette maladie?

Exercice 4. Le dépistage systématique d'une maladie est effectué sur une population dont 0.1% des individus est malade. Le test utilisé donne 95% de résultats positifs pour les personnes atteintes par la maladie, et 1% de résultat positifs pour les personnes non atteintes.

Quelle est la probabilité conditionnelle qu'une personne prise au hasard soit atteinte sachant que le test a donné un résultat positif ? soit indemne sachant que le test a donné un résultat négatif?

Exercice 5. On lance un dé régulier, puis on effectue deux tirages d'une boule avec remise:

- dans l'urne U contenant 9 boules blanches et 1 noire, si le dé amène l'as,
- dans l'urne V contenant 3 boules blanches et 7 noires, si le dé n'amène pas l'as.

On supposera qu'il existe un modèle probabiliste (Ω, P) associé à cette expérience aléatoire, et des évènements U, V, B_k et N_k correspondant respectivement à: on tire dans l'urne U, on tire dans l'urne V, la k-ème boule tirée est blanche et la k-ème boule tirée est noire.

a) Les évènements B_1 et N_2 sont-ils indépendants? Sont-ils indépendants conditionnellement à U? Conditionnellement à V?

b) On obtient une boule blanche, puis une noire. Dans quelle urne est-il plus probable qu'on les ait tirées?

$\star$ **Exercice 6.** On admet que dans une famille les sexes des enfants sont indépendants les uns des autres et que chaque enfant a la probabilité $1/2$ d'être un garçon et la probabilité $1/2$ d'être une fille.

a) Une famille a deux enfants dont l'un au moins est un garçon. Quelle est la probabilité pour que les deux enfants soient des garçons?

b) Une famille a deux enfants dont l'aîné est un garçon. Quelle est la probabilité pour que les deux enfants soient des garçons?

$\star$ **Exercice 7.** On cherche un parapluie qui se trouve dans un immeuble de 7 étages (RdC compris) avec la probabilité p ($p \in [0, 1]$). On a exploré en vain les 6 premiers niveaux. Quelle est la probabilité que le parapluie se trouve au 7-ème étage?
(On admettra qu'il n'y a pas a priori d'étage privilégié!)

$\star$ **Exercice 8.** On s'intéresse à la transmission d'une information binaire, c'est-à-dire ne pouvant prendre que deux valeurs. On admet que le procédé de transmission directe entre deux individus A et B est tel que, lorsque A émet une valeur de l'information à destination de B, ce dernier reçoit la valeur émise par A avec la probabilité p, et donc l'autre valeur avec la probabilité $q = 1 - p$ (on suppose que $0 < p < 1$).

On considère des individus successifs $i_0, i_1, \dots, i_n$ avec $n \in \mathbb{N}$. L'information émise par i_0 est transmise à i_1, qui transmet la valeur reçue à i_2, et ainsi de suite jusqu'à i_n. Entre deux individus, i_k et i_{k+1}, la transmission de l'information suit la loi décrite plus haut. On note p_k la probabilité que la valeur de l'information reçue par i_k soit identique à celle émise par i_0, et on pose $p_0 = 1$.

a) Exprimer p_{k+1} en fonction de p_k.

b) On rappelle que pour étudier une suite arithmético-géométrique du genre $u_{n+1} = au_n + b$ on pose $v_n = u_n + \alpha$ avec α tel que (v_n) soit une suite géométrique. En déduire une expression de p_n en fonction de n et de p.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

d) Déterminer un p tel que $p_{100} > 99,9\%$.

$\star$ **Exercice 9.** Une puce se déplace entre 3 points A, B et C. Au départ elle est en A. A chaque étape, elle quitte sa position et gagne indifféremment l'un des deux autres points. On note α_n, β_n et γ_n les probabilités qu'elle se trouve respectivement en A, B et C à l'issue de la n-ème étape (on pose $\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = \gamma_0 = 0$).

a) Calculer $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ et $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$.

b) Exprimer $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \gamma_{n+1}$ en fonction de $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$, puis $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ en fonction de n. Quelles sont les limites de α_n, β_n et γ_n lorsque n tend vers $+\infty$?