L3 MPI
2008-2009
Mathématiques

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

TD n°4: Couples de v.a. discrètes: loi de couple, loi marginale, loi conditionnelle

Exercice 1. Soit (ξ, η) un vecteur aléatoire ayant la loi de probabilité

$$\mathbb{P}(\xi=-1,\eta=-1)=1/8,\quad \mathbb{P}(\xi=0,\eta=-1)=1/12,\quad \mathbb{P}(\xi=1,\eta=-1)=1/8,$$
$$\mathbb{P}(\xi=-1,\eta=1)=9/24,\quad \mathbb{P}(\xi=0,\eta=1)=1/6,\quad \mathbb{P}(\xi=1,\eta=1)=1/8.$$

a) Trouver les lois marginales de ξ et de η.
b) Calculer la covariance de ξ et η. Les variables ξ et η sont-elles indépendantes?
c) Trouver la loi conditionnelle de ξ sachant η et en déduire $E(\xi|\eta)$.

Exercice 2. Soient $b, r \in \mathbb{N}^*$ et $c \in \mathbb{N}$. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On effectue des tirages successifs de la manière suivante: une boule étant tirée, on la remet dans l'urne avec en plus c boules de la même couleur. On note X_n la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la boule obtenue au n-ème tirage est rouge, et la valeur 0 si elle est blanche. On posera $p = r/(b+r)$ et $q = b/(b+r)$.
a) Quelle est la loi de X_1?
b) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 et comparer à celle de X_1.
c) Trouver les lois conditionnelles de X_1 sachant X_2 et de X_2 sachant X_1.
d) Déterminer la loi de la variable $S_2 = X_1 + X_2$.
e) Déterminer la loi de X_3 sachant que $S_2 = k$ pour $k \in \mathbb{N}$, i.e. la loi conditionnelle de X_3 sachant S_2.
f) Déduire du d) que la loi de X_3 est la même que celle de X_1.
g) Déterminer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant S_n, puis exprimer la loi de X_{n+1} à l'aide de $E(S_n)$.
h) Montrer que toutes les variables aléatoires X_n ont la même loi de probabilité.

Exercice 3. Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes, de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1)$, respectivement $\mathcal{P}(\lambda_2)$.
a) Déterminer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2 = n$.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $E(X_1 | X_1 + X_2 = n)$.

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires telles que :

- X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$,
- la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(p, n)$.

a) Déterminer la loi du couple (X, Y) puis la loi de Y.
b) Les variables aléatoires $X - Y$ et Y sont-elles indépendantes?
c) Calculer $E(X|Y = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\star$ **Exercice 5.** Soit A_n le nombre de clients arrivés sur un canal de communication pendant la n-ème unité de temps. On suppose que pour tout n, A_n suit la loi de Poisson de paramètre λ_n et que les variables aléatoires $(A_n)_n$ sont indépendantes.

a) Trouver la loi conditionnelle de A_1 sachant que $A_1 + \cdots + A_n = N$.

b) Chaque client fait une tentative de transmission avec la probabilité p et quitte le canal avec la probabilité $1-p$. On note $\tilde{A}_n$ le nombre de clients arrivés pendant la n-ème unité de temps et qui effectuent une tentative de transmission. Trouver la loi de $\tilde{A}_n$.

$\star$ **Exercice 6.** Soient X et N des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On sait que $E(N) = m$ et $V(N) = \sigma^2$ où m et σ sont des constantes réelles positives (on ne connaît pas la loi de N). On suppose que la loi conditionnelle de X sachant $N = n$ est donnée par:

$$P(X = k|N = n) = \begin{cases} \frac{1}{1+n} & \text{si} \qquad 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $E(X|N = n)$ et $E(X^2|N = n)$, puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

b) On suppose que $Y = N - X$ et X sont indépendantes. Calculer $E(Y)$, $V(Y)$, $E(N|X = x)$, et $E(N|Y = y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{N}$.

$\star$ **Exercice 7.** Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. (discrètes) indépendantes, de même loi avec $E(X_i) = \mu$ et $V(X_i) = \sigma^2$. Soit N une v.a. à valeurs entières indépendante des X_i avec $E(N) = \nu$ et $V(N) = \tau^2$. On pose: $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Déterminer $E(S_N|N = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire $E(S_N)$ et $V(S_N)$.