L3 MPI
2008-2009
Mathématiques

# TD n°5: Variables aléatoires à densité

**Exercice 1.** Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f_X(t) = \alpha t \mathbb{1}_{[0;\beta]}(t)$.
**a)** Déterminer une relation entre $\alpha$ et $\beta$.
**b)** Représenter $f_X$ ainsi que la fonction de répartition $F_X$ de $X$.
**c)** Déterminer $\alpha$ et $\beta$ pour que $X$ ait une espérance égale à 2.

**Exercice 2.** Soit $X$ une variable aléatoire dont la fonction de répartition s'écrit

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ \alpha - e^{-x}(1+x) & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

**a)** Quelle est la valeur de $\alpha$?
**b)** Calculer $P(-2 < X < 3)$.
**c)** Calculer $E(\mathrm{e}^{-X})$.

**Exercice 3.** On suppose que la durée, en minutes, d'attente entre deux appels consécutifs à une ligne d'assistance informatique suit une loi exponentielle de paramètre 1.
**a)** Quelle est la probabilité que l'attente entre deux appels soit comprise entre 1 et 2 minutes? soit inférieure à 10 minutes? soit supérieure à 2 minutes?
**b)** Déterminer $\lambda$ pour que la probabilité que l'attente soit supérieure à $\lambda$ soit égale à la probabilité que l'attente soit inférieure à $\lambda$.
**c)** Déterminer l'attente moyenne entre deux appels.

**Exercice 4.** Soient $X_1$ et $X_2$ des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}xp(\lambda_1)$, respectivement $\mathcal{E}xp(\lambda_1)$. Déterminer la loi de la variable $U = \min(X_1, X_2)$.

**Exercice 5.**
**a)** Soit $X$ une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.
  ($i$) Calculer $P(X<1)$, $P(X< -1.6)$, $P(1<X<2)$ et $P(-0.7<X<1.3)$.
  ($ii$) Déterminer $a$ tel que: $P(X>a) = 0,05$, $P(0<X<a) = 0,95$, $P(-a<X<a) = 0,96$.
**b)** Cette fois $X$ suit la loi $\mathcal{N}(-2, 4)$.
  ($i$) Calculer $P(X<0.5)$, $P(X<-0.3)$ et $P(-2<X<1)$.
  ($ii$) Déterminer $a$ tel que: $P(X<a) = 0,9$ et $P(|X+2|<a) = 0,95$.

**Exercice 6.** Soit $X$ une variable aléatoire dont la densité est donnée par $f_X(x) = \dfrac{1}{2}(2x+1)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$, et $Y = X^2$. Déterminer la loi de la variable $Y$.

**Exercice 7.** Soit $X$ une variable aléatoire dont la densité est donnée par:

$$f(x) = \frac{K}{x} e^{-\frac{1}{2}(\ln x + 1)^2} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

**a)** Trouver $K$ pour que $f$ soit une densité de probabilité.
**b)** Calculer $E(X)$.
**c)** On pose $Y = \ln(X)$. Déterminer la loi de la variable $Y$.