L3 MPI
2008-2009
Mathématiques

TD n°6: Couples de v.a. à densité

Exercice 1.

a) Soit A le domaine du carré unité défini par

$$A = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \,|\, x \geq y + \frac{1}{2} \text{ ou } x \leq y \leq x + \frac{1}{2}\}.$$

(i) Déterminer $\iint \mathbb{1}_A(x, y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(ii) Soit (X, Y) un couple de v.a. de densité uniforme sur A. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

(iii) Calculer $Cov(X, Y)$.

b) Mêmes questions avec $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de la même loi $N(0, 1)$. Calculer $P(2 \leq X^2 + Y^2 \leq 3)$.

Exercice 3. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(2x + y)\mathbb{1}_{[0;1]\times[0;2]}(x, y).$$

a) Calculer $P(Y \leq 1)$, $P(X \leq \frac{1}{2};\ Y \leq 1)$ et $P(X + Y \leq 1)$.

b) Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(X + Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$.

c) X et Y sont elles indépendantes? $X - \frac{1}{2}$ et $Y - 1$ sont-elles indépendantes?

d) Quelle est la loi du couple $((X - \frac{1}{2})^2, (Y - 1)^2)$?

e) Les variables aléatoires $(X - \frac{1}{2})^2$ et $(Y - 1)^2$ sont-elles indépendantes?

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètre λ. Déterminer les lois des variables aléatoires: $-Y$, $X + Y$ et $X - Y$.

Exercice 5. Soit (X_1, X_2) un couple de v.a.r. admettant la densité de probabilité

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2(1 - \rho^2)}\right), \qquad \text{où } \rho \in]0, 1[.$$

a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$ et trouver les lois marginales de X_1 et X_2. Ces v.a.r. sont-elles indépendantes?

b) On pose $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ et $\Phi \in [0, 2\pi[$ défini par: $\cos\Phi = \frac{X_1}{R}$ et $\sin\Phi = \frac{X_2}{R}$. Déterminer la densité du couple (R, Φ).

Exercice 6. Soit L une v.a.r. positive admettant une densité de probabilité f et X une v.a.r. de loi uniforme sur $[0, 1]$ indépendante de L. On définit deux v.a.r. L_1 et L_2 par $L_1 = XL$ et $L_2 = (1 - X)L$ (celà représente par exemple la rupture aléatoire, en 2 morceaux de longueurs L_1 et L_2, d'un brin d'ADN de longueur initiale aléatoire L.

a) Déterminer la loi du couple (L_1, L_2) ainsi que les lois de L_1 et L_2.

b) Que peut-on dire du couple (L_1, L_2) lorsque $f(y) = \lambda^2 y \mathrm{e}^{-\lambda y}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y)$, $\lambda > 0$?

c) Déterminer la loi de $Z = \min\{L_1, L_2\}$.

$\star$ **Exercice 7.** Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. indépendantes et de même loi de probabilité de densité f.

a) Quelle est la densité du vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_n)$?

b) Si σ est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$, quelle est la densité de $X_\sigma = (X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$?

c) On note $Y_1 \leq Y_2 \leq \cdots \leq Y_n$ les valeurs prises par $X_1, \ldots, X_n$ réordonnées dans l'ordre croissant. Montrer que si $F = \{Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n\}$, $P(F) = 1$ et que $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ admet pour densité sur $\mathbb{R}^n$ la fonction

$$f_Y(y_1, \ldots, y_n) = n! f(y_1) \cdots f(y_n) \mathbb{1}_{(y_1 < \cdots < y_n)}(y_1, \ldots, y_n).$$

d) Application: 3 personnes arrivent en même temps à un guichet. Il y a deux guichetiers et une seule queue. La durée d'un client avec le guichetier suit une loi exponentielle de paramètre λ. Deux des trois passent de suite et le troisième attend. Quelle est la probabilité que ce soit lui qui finisse le dernier des trois?

e) On suppose que les v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivent une loi exponentielle de paramètre λ, et on définit $Z_1 = Y_1$, $Z_2 = Y_2 - Y_1$, $\ldots$, $Z_n = Y_n - Y_{n-1}$. Déterminer la loi de $(Z_1, \ldots, Z_n)$. Les v.a. $Z_1, \ldots, Z_n$ sont-elles indépendantes? Déterminer la loi marginale de chacune d'entre elles.

$\star\star$ **Exercice 8.** Soit h une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to]0, 1[$. Soit $(Y_n, U_n)_{n \geq 1}$ une suite de couples de v.a.r., telle que $\{Y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ soient indépendantes. Les Y_n ont la même densité h et les U_n suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$. Soit τ le premier instant où $U_n \leq g(Y_n)$, i.e.

$$\tau = \inf\{n \geq 1 \mid U_n \leq g(Y_n)\}, \qquad \text{convention: } \inf \emptyset = +\infty.$$

a) Exprimer $p = P(U_n \leq g(Y_n))$ à l'aide de h et de g.

b) Quelle est la loi de τ en fonction de p? Montrer que $P(\tau < +\infty) = 1$.

c) Soit X la v.a. $X = Y_\tau$, i.e. $X(\omega) = Y_{\tau(\omega)}(\omega)$. Quelle est la loi de X?