L3 MPI
2008-2009
Probabilités

TD n°7: Convergence de variables aléatoires

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $Y_n = \begin{cases} n & \text{si} \quad 0 \leq X \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad X < 0 \quad \text{ou} \quad X > \frac{1}{n} \end{cases}$.

La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle en probabilité? presque sûrement? en moyenne d'ordre 1?

b) On pose $U_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$. La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle presque sûrement?

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, la suite $(S_n/n)_n$ converge-t-elle en probabilité?

a) S_n suit la loi binomiale $B(n,p)$, où $p \in [0,1]$ est fixé.

b) S_n suit la loi de Poisson du paramètre n.

c) S_n suit la loi normale $\mathcal{N}(0,n)$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_n$ une suite des variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Poisson de paramètre $\alpha_n > 0$. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha$. Etudier la convergence en probabilité de la suite $(Y_n)_n$ où $Y_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$.

Exercice 4. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout n, X_n suit la loi uniforme sur l'ensemble fini

$$A_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}.$$

Montrer que $(X_n)_n$ converge en loi vers une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 5. Soient $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, et X une autre variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que si $(X_n)_n$ converge en loi vers X alors, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$.

b) Prouver la réciproque du a).

c) Application: Soit $\lambda > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\lambda}{n} \leq 1$, soit X_n une variable aléatoire de loi binomiale $B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ (on considèrera X_n comme une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$ avec $P(X_n = k) = 0$ pour tout $k > n$), et soit X une variable suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que $(X_n)_n$ converge en loi vers X.

d) Donner un exemple où la suite des variables aléatoires X_n converge en loi vers une variable aléatoire X mais où la suite $X_n - X$ ne converge pas en loi vers 0.

Exercice 6. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de la même loi uniforme sur $[0,1]$, Y une variable aléatoire de loi exponentielle du paramètre $\lambda = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $Z_n = n \min\{X_1, \dots, X_n\}$. Montrer que la suite $(Z_n)_n$ converge en loi vers la variable Y.

Exercice 7. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2, telle que $\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = +\infty$ et $\sup_n \frac{V(X_n)}{E(X_n)} < +\infty$. Montrer que la suite de variables $Y_n = \frac{X_n}{E(X_n)}$ converge vers 1 en moyenne d'ordre 2.

Exercice 8. Soit $(X_n)_n$ une suite des variables aléatoires ayant toutes la même espérance $m \in \mathbb{R}$ et la même variance σ^2. On suppose que $\mathrm{Cov}(X_n, X_m) \leq 0$ pour tous $n \neq m$, $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite $(X_n)_n$ vérifie la loi faible des grands nombres. (*Indication:* on pourra commencer par montrer que la suite $S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ converge en moyenne d'ordre 2.)

$\star$ **Exercice 9.** Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout n,

$$X_n(\Omega) = \{1, 2, \ldots, n\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n \leq k) = \frac{k^2(3n - 2k)}{n^3}, \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ désigne la partie entière de x.

a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{[nt]}{n}$.

b) Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $P(Y_n \leq t) = \frac{[nt]^2}{n^3}(3n - 2[nt])$.

c) En déduire, pour $t \in \mathbb{R}$, l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq t)$.

d) Montrer que la suite $(Y_n)_n$ converge en loi, et donner la loi limite.

$\star$ **Exercice 10.** Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes centrées telle que $V(X_n) = \sigma^2 < 1$ pour tout n. On pose $Y_n = \prod_{k=1}^n X_k$, et $Z_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n Y_k$ où $\alpha > 0$. Calculer la variance de Y_n et en déduire la convergence en probabilité des suites $(Y_n)_n$ puis $(Z_n)_n$.

$\star$ **Exercice 11.** Soient $\theta \in]0, 1[$ et $(X_n)_n$ une suite des variables aléatoires ayant toutes la même espérance $m \in \mathbb{R}$. On suppose de plus que les covariances vérifient

$$|\mathrm{Cov}(X_n, X_m)| \leq \theta^{|n-m|}, \qquad \forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2.$$

a) Soient X, Y, Z des variables aléatoires. Montrer que $\mathrm{Cov}(X, Y + Z) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Z)$.

b) Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que pour tous n et m on a

$$|\mathrm{Cov}(S_n, X_m)| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \theta^{|k|} = \frac{1+\theta}{1-\theta}.$$

c) Montrer que $V(S_n) \leq n(1 + \theta)/(1 - \theta)$.

d) Montrer que la suite $(X_n)_n$ vérifie la loi faible des grands nombres.

$\star$ **Exercice 12.** Soient $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de la même loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout n, on pose

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k).$$

Etudier la convergence de la suite $(I_n)_n$ (montrer que la suite $(I_n)_n$ converge, préciser le sens de cette convergence et identifier la limite).

$\star$ **Exercice 13.** Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi:

$$X_n(\Omega) = \{-1, 1\}, \quad P(X_n = -1) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. D'après la loi faible des grands nombres, on sait que $\frac{S_n}{n}$ tend vers 0 en probabilité, i.e. pour tout $a > 0$ on a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq a\right) = 0$. Le but de cet exercice est d'estimer à quelle vitesse cette convergence a lieu.

a) Calculer $E(\mathrm{e}^{xS_n})$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$.

b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $E(\mathrm{e}^{xS_n}) \leq \mathrm{e}^{\frac{n}{2}x^2}$ (on pourra étudier rapidement le signe de la fonction $f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln(\mathrm{Ch}(x))$ sur $\mathbb{R}^+$).

c) Montrer que $P(S_n \geq a) \leq e^{-ax} E(\mathrm{e}^{xS_n})$, $\forall a > 0$, $\forall x > 0$, $\forall n \geq 1$. En déduire que $P(|S_n| \geq a) \leq 2\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2n}}$ puis que $P(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq a) \leq 2\mathrm{e}^{-n\frac{a^2}{2}}$.