L3 MPI
2008-2009
Probabilités

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

TD n°8: Fonctions caractéristiques. Théorème central limite et applications.

Exercice 1. Déterminer la fonction caractéristique de la variable aléatoire X lorsque
a) $X = a$ p.s., b) $X \sim \mathcal{B}ernoulli(p)$, c) $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, d) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, e) $X \sim Geom(p)$, f) $X \sim \mathcal{U}([a,b])$, g) $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$, h) $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, i) $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, j) $X \sim \mathcal{C}auchy(a)$, k) $X = Y^2$ avec $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 2. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes. Trouver la loi de la variable $Z = X + Y$ lorsque

a) X suit la loi $\mathcal{N}(a_1, \sigma_1^2)$ et Y suit la loi $\mathcal{N}(a_2, \sigma_2^2)$.

b) X et Y sont de la même loi de Cauchy du paramètre $a > 0$.

Exercice 3. Un dé à 6 faces amène le 6 avec un probabilité $p \in]0,1[$ à chaque lancer. On lance indéfiniment le dé. Soit X_n la v.a.r représentant le nombre de fois où le 6 apparait au cours des $6n$ premiers lancers.

a) Quelle est la loi de X_n? Donner son espérance et sa variance.

b) On suppose que le dé est honnête. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle on a plus d'une chance sur 2 d'obtenir une fréquence d'apparition de 6 qui s'écarte de moins de 10^{-2} de la valeur $\frac{1}{6}$.

Exercice 4. On effectue n parties de "Pile ou face". Déterminer n pour que l'on puisse affimer que la fréquence d'apparition de "pile" dans l'ensemble des n parties soit comprise entre 0.45 et 0.55 avec une probabilité au moins égale à 0.90.

a) A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

b) En utilisant le Théorème central limite.

Exercice 5. Une montre fait une erreur d'au plus une demi minute par jour. Quelle est la probabilité que l'erreur commise au bout d'une année soit d'au plus 1/4 d'heure? (On modélisera l'erreur quotidienne en minute par une variable de loi uniforme sur $[-0.5; 0.5]$)

Exercice 6. Les 300 places d'un avion sont réservées. On suppose que le poids d'un voyageur est une variable aléatoire de moyenne 70kg et d'écart-type 8kg. Le poids maximum de bagages autorisé par voyageur étant de 20kg, on suppose que le poids des bagages d'un voyageur est une variable aléatoire de moyenne 15kg et d'écart-type 5kg. Le poids de l'appareil avant l'embarquement des voyageurs et de leurs bagages est de 250 tonnes. Les consignes de sécurité interdisent le décollage si le poids total de l'appareil chargé dépasse $276,5$ tonnes. Quelle est la probabilité que le décollage soit interdit?

Exercice 7. Un restaurant peut servir 75 repas. La pratique montre que 20% des clients ayant réservé ne viennent pas.

a) Le restaurateur accepte 90 reservations. Quelle est la probabilité qu'il se présente plus de 50 clients?

b) Combien le restaurateur peut-il accepter de réservations pour avoir une probabilité supérieure ou égale à 0.9 de pouvoir servir tous les clients qui se présenteront?

Exercice 8. Un représentant en automobiles se présente à chacun des 100 appartements d'une résidence. Il considère qu'à chaque visite la probabilité de vendre une automobile est $0,04$ et que la vente dans un appartement est indépendante de la vente dans les autres appartements.

a) Pour chaque appartement, introduire une v.a. qui permet de modéliser la vente ou non d'un véhicule.

b) Quelle est sa loi? Rappeler son espérance et sa variance.

c) Soit S le nombre aléatoire d'automobiles vendues dans cette résidence.

- $i)$ Quelle est sa loi (justifier votre réponse)? Donner la formule générale $P(S = k)$, en précisant les valeurs possibles de k.
- $ii)$ Rappeler son espérance et sa variance?

d) Par quelle loi peut-on approximer la loi de S? (justifier votre réponse)

e) En utilisant cette approximation, calculer la probabilité que:

- $i)$ la vente soit supérieure à 3 automobiles.
- $ii)$ la vente soit nulle.

Examen de Probabilités 2007/2008
(durée 3 heures)

Exercice 1. On jette deux dés indiscernables et équilibrés indépendamment l'un de l'autre et on note le résultat obtenu.

a) Ecrire l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de probabilité associé à cette expérience.

b) Si le plus petit (au sens large) vaut au moins 2, quelle est la probabilité que l'autre soit plus grand que 5

Exercice 2. Une machine fabrique des pièces cylindriques dont le diamètre en cm est représenté par une variable aléatoire notée X ayant une densité

$$f(x) = \begin{cases} 25(x - 0,8) & \text{si} \quad 0,8 \leq x \leq 1, \\ 25(1,2 - x) & \text{si} \quad 1 < x \leq 1,2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Tracer le graphe de f.

b) Déterminer la fonction de répartition $F(x)$ de X.

c) Calculer $P(0,9 < X < 1,1)$, $P(X < 0,9)$ et $P(X > 1,1)$.

d) Toute pièce fabriquée est vérifiée à l'aide de deux calibres, l'un de 0,9 cm, l'autre de 1,1 cm. La pièce est acceptée si elle passe dans le grand et ne passe pas dans le petit. Sinon, elle est refusée.
Donner la probabilité que la pièce soit acceptée, puis qu'elle soit trop petite, puis trop grande.

e) Le coût de fabrication d'une pièce est de $0,30$ euros. Si la pièce est trop petite, elle est définitivement perdue, si elle est trop grande on peut la rectifier et le coût de cette opération est de $0,10$ euros supplémentaires. Finalement, une pièce est vendue $0,60$ euros.

On note Y la variable aléatoire représentant le bénéfice en euros réalisé sur une pièce (le bénéfice est négatif si on perd de l'argent).
Donner la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.

f) L'entreprise fabrique 10000 pièces. On note Y_i la variable représentant le gain réalisé sur la i-ème pièce. On supposera que les différentes pièces sont fabriquées de façon indépendantes.

i) Exprimer le gain total G en fonction des Y_i. Donner l'espérance et la variance de G.
ii) Par quelle loi peut-on approcher G (justifier votre réponse)?
iii) En déduire approximativement la probabilité que le gain soit supérieur à 2100 euros.

Exercice 3. Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité

$$f(x, y) = (\alpha y + xy^2)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y).$$

a) Déterminer α pour que f soit bien une densité de probabilité.

b) Déterminer la densité de la variable X, ainsi que celle de Y.

c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

d) Calculer $E(X)$, $E(Y)$ et $\text{Cov}(X, Y)$.

e) On considère le couple (U, Y) où $U = XY$.

i) Donner et dessiner le domaine D dans lequel le couple (U, Y) prend ses valeurs.
ii) Calculer la densité de probabilité de (U, Y).
iii) En déduire la densité de probabilité de U.

Questions de cours et applications

1) Rappeler la formule du crible donnant la probabilité de la réunion de n évènements $A_1, \dots, A_n$.
2) Quelle relation y a-t-il entre $P(\cup_{i=1}^n A_i)$ et $\sum_{i=1}^n P(A_i)$?
3) On considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives, indépendantes, de même loi et de carré intégrable (c'est à dire que $E(X_i^2) < +\infty$. On note A_i l'évènement $X_i > a$ où $a > 0$, et $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

a) Rappeler l'inégalité de Markov puis l'appliquer pour montrer que $P(A_i) \leq \frac{E(X_i^2)}{a^2}$.
b) Comparer les évènements $Y_n > a$ et $\cup_{i=1}^n A_i$.
c) En utilisant a) et b) montrer que $P(Y_n > a) \leq \frac{nE(X_i^2)}{a^2}$.
d) En déduire que la variable aléatoire $Z_n = \frac{1}{n} Y_n$ tend vers 0 en probabilité lorsque $n \to +\infty$.