MFA-M1 et MADOCS-M1
2008/2009
Analyse fonctionnelle et EDP

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

TD n^{o}2: Espaces de Banach

Exercice 1. On considère, pour $u \in C^0([a,b])$, $\|u\|_{L^1} = \int_a^b |u(t)|dt$, ce qui définit une norme sur $C^0([a,b])$. Montrer en donnant un exemple explicite de suite de Cauchy non convergente que $(C^0, \|\cdot\|_{L^1})$ n'est pas un espace de Banach.

Exercice 2. Soit X un evn. Montrer que X^* est un espace de Banach.

Exercice 3. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels, et on le munit d'une norme N quelconque (e.g. si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, on pose $N(p) = |a_0| + \cdots + |a_n|$).

a) Montrer que le sous-espace $F_n = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n est un sous-espace fermé.

b) Montrer que F_n est d'intérieur vide. (Raisonner par l'absurde, en montrant que si F_n n'est pas d'intérieur vide alors $F_n = E$.)

c) En déduire que E n'est pas complet. (Raisonner par l'absurde et utiliser de Baire.)

Exercice 4. On rappelle que l^2 désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes telles que $\|a\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2$ converge. Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes, i.e. $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, telle que pour tout $b \in l^2$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ converge.

a) Montrer que pour tout N, $T_N : \left\{ \begin{array}{ccc} l^2 & \to & \mathbb{C} \\ (b_n)_n & \mapsto & \sum_{n=0}^N a_n b_n \end{array} \right.$ est linéaire continue et que $\|T_N\| = \left(\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 \right)^{1/2}$.

b) En déduire que $a \in l^2$.

Exercice 5. Soit X un espace de Banach et f une forme bilinéaire sur $X \times X$ continue par rapport à chacune de ses variables, i.e.

$$\forall y \in X,\ x \mapsto f(x,y) \text{ est continue, et } \forall x \in X,\ y \mapsto f(x,y) \text{ est continue.}$$

a) Montrer que f est continue sur $X \times X$ si et seulement elle l'est en $(0,0)$.

b) En déduire que f est continue sur $X \times X$ si et seulement si il existe $C \geq 0$ tel que $|f(x,y)| \leq C\|x\|\|y\|$ pour tous $x, y \in E$.

c) Soit $\Gamma = \{y \in X,\ \|y\| = 1\}$. Pour tout $y \in \Gamma$, on définit $A_y : X \to \mathbb{C}$ par $A_y(x) = f(x,y)$. Montrer que $A_y \in X^*$ et que pour tout $x \in X$ il existe $C_x \geq 0$ tel que $|A_y(x)| \leq C_x$ pour tout $y \in \Gamma$.

d) En déduire que f est continue sur $X \times X$.

Question subsidiaire: Donner un exemple de fonction f définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ continue par rapport à chacune de ses variables mais qui n'est pas continue.

Exercice 6. Soient x et y deux éléments distincts d'un espace de Banach X. Montrer que

$$\exists f \in X^*, \quad f(x) \neq f(y).$$

On traitera séparément 2 cas selon que x et y sont linéairement indépendants ou non.

Exercice 7. Soit X un espace de Banach. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, montrer que pour tout $x \in X$ on a

$$\|x\|_X = \sup\{|f(x)|,\, f \in X^*,\, \|f\|_{X^*} \leq 1\} = \max\{|f(x)|,\, f \in X^*,\, \|f\|_{X^*} \leq 1\}.$$

Exercice 8. Soit X un espace de Banach et A un sous-ensemble de X (pas nécessairement un sous-espace). On suppose que pour tout $f \in X^*$ l'ensemble $f(A)$ est borné. Montrer que A est borné.

Indication: considérer la famille d'application linéaires $T_a : \begin{cases} X^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(a) \end{cases}$ et utiliser l'exercice précédent.

Exercice 9. Soient X et Y deux espaces de Banach, et T une application linéaire de X dans Y. On suppose que $\forall \varphi \in Y^*$, $\varphi \circ T \in X^*$. Montrer que T est continue (on pourra utiliser le théorème du graphe fermé).

Application: soient H un espace de Hilbert et T un endomorphisme de H tel que $\langle x, Ty \rangle = \langle Tx, y \rangle$ pour tous $x, y \in H$. Montrer que T est continue. (Indication: penser au théorème de Riesz.)

Exercice 10. Soient X et Y deux espaces de Banach, et T une application linéaire de X dans Y. On suppose que pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de X,

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = 0_X \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} Tx_n = y \quad \text{existe}\right) \Rightarrow y = 0_Y.$$

Montrer que T est continue.

Exercice 11. Soient X un espace de Banach et T une application linéaire de X dans X^* vérifiant

$$\forall x \in X, \quad (Tx)(x) \geq 0.$$

a) Montrer que pour tous x et y dans X,

$$((Tx)(y) + (Ty)(x))^2 \leq 4(Ty)(y) \times (Tx)(x).$$

b) En déduire que T est continue (on pourra utiliser l'exercice précédent).

Exercice 12. Soit X un espace vectoriel, que l'on munit de deux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$. On suppose que X, muni de chacune de ces normes, est complet, et qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall u \in X, \quad \|u\|_1 \leq C\|u\|_2.$$

Montrer que les deux normes sont équivalentes.